МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В.Крянев А.И.Черный

РОБАСТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СГЛАЖИВАЮЩИЕ СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Препринт 006-97

Рекомендован к изданию
редсоветом института

Москва 1997

УДК 517.518.85
К85

Крянев А.В., Черный А.И. **Робастные линейные сглаживающие сплайны и их применения.** М : Препринт/ МИФИ, 004-97, 1997. – 16 с.

Представлена теория робастных линейных сглаживающих сплайнов (РЛСС). Исследуются свойства РЛСС и сконструированы эффективные численные алгоритмы их восстановления. Приведены примеры использования РЛСС при решении задач математической теории инвестиций.

ISBN 5-7262-0102-7

Введение

При решении многих практических задач, например в математической экономике, при математической обработке экспериментальных данных, часто возникает необходимость сглаживания совокупности экспериментальных точек (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$. Проведение операции сглаживания, как правило, априори предполагает, что рассматривается задача восстановления функциональной зависимости $y = y(x)$ с непрерывным изменением аргумента x, т.е. восстановленная функциональная зависимость должна позволять подсчитывать значения функции $y(x)$ для всех значений аргумента x.

Однако встречаются задачи, в которых только дискретная совокупность "экспериментальных" точек (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$ соответствует реально существующей зависимости, а остальные значения аргумента x и соответствующие им значения y не имеют никакого смысла в рамках рассматриваемой задачи сглаживания.

При рассмотрении такого рода задач по существу идет речь о сглаживании только совокупности "экспериментальных" точек (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$ и исследователя совершенно не интересуют промежуточные значения аргумента x, принадлежащие открытым интервалам $]x_i, x_{i+1}[$, $i = \overline{1, n-1}$.

Представленные ниже сглаживающие линейные сплайны дают возможность наиболее экономно и в то же время эффективно производить операцию сглаживания дискретной совокупности точек (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$ по сравнению, например, со сглаживающими кубическими сплайнами. Действительно, линейные сглаживающие сплайны имеют наиболее простую структуру для значений $x \in]x_i, x_{i+1}[$, $i = \overline{1, n-1}$, а именно – линейную зависимость от x, что и дает возможность сконструировать более простые и эффективные алгоритмы их численного восстановления, в том числе восстановления РЛСС по сравнению, например, с кубическими сглаживающими сплайнами.

Сглаживающие линейные сплайны

Напомним, что интерполяционным сплайном первой степени (линейным интерполяционным сплайном) называется кусочно-линейная функция $S(x)$, проходящая через заданные точки (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$, $x_1 < x_2 < \quad < x_n$ [1–3].

Введем класс функций W_1, заданных на промежутке $[x_1, x_n]$, таких, что:

1) $S(x)$ непрерывна на $[x_1, x_n]$;

2) $S(x_i) = y_i$, $i = \overline{1,n}$, где y_i – заданные числа;

3) $S(x)$ непрерывно дифференцируема на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n-1}$;

4) в точках $x = x_i$, $i = \overline{2, n-1}$ $S'(x)$ может иметь разрывы первого рода.

Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{1, n-1}$.

Лемма 1. Среди всех функций $f(x) \in W_1$ линейный интерполяционный сплайн $S(x)$ и только он минимизирует функционал

$$J(f) = \int_{x_1}^{x_n} f'^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса W_1. Имеем $J(S-f) = J(f) - J(S) + Q$, где $Q = 2\int_{x_1}^{x_n} S' \cdot (S' - f')\,dx$.

Получаем следующую цепочку равенств:

$$Q = 2\sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'(S' - f')\,dx = 2\sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - f'(x)\right) dx =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{h_i} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \cdot (y_{i+1} - y_i)\right] = 0.$$

Следовательно, $J(S') = J(f) - J(S-f)$. Но $J(S-f) \ge 0$, и поэтому линейный интерполяционный сплайн $S(x)$ доставляет минимум функционалу (1).

Предположим, что $f^*(x)$ – еще одна функция из класса W_1, минимизирующая функционал (1).

Имеем $J(f^* - S) = 0$, т.е. $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f^{*\prime}(x) - S'(x))^2\,dx = 0, i = \overline{1, n-1}$.

Поскольку $f^{*\prime}(x)$ и $S'(x)$ непрерывны на $[x_i, x_{i+1}]$, из последнего равенства получаем $f^{*\prime}(x) = S'(x)$ на любом промежутке $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Следовательно, $f^*(x) = S(x) + C_i$ для $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Но $f^*(x_i) = S(x_i)$, откуда $C_i = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$f^*(x) = \underset{f(x)}{\mathrm{argmin}}\, J_\alpha(f(x)) = \underset{f(x)}{\mathrm{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i}\right)^2 + \alpha \int_{x_1}^{x_n} f'^2(x)\,dx \right\}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ – фиксировано.

Лемма 2. Минимум функционала $J_\alpha(f(x))$ достигается на линейном интерполяционном сплайне.

Действительно, зафиксировав значения $f^*(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, проведем через точки $(x_i, f^*(x_i))$ линейный интерполяционный сплайн $S_\alpha(x)$. В силу леммы 1 имеем неравенство

$$\int_{x_1}^{x_n} S'^2_\alpha(x)\,dx \le \int_{x_1}^{x_n} f^{*\prime 2}(x)\,dx.$$

Следовательно, $J_\alpha(S_\alpha(x)) \le J_\alpha(f^*(x))$, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - f^*(x_i))^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - S_\alpha(x_i))^2}{\sigma_i^2}.$$

Лемма доказана.

Пусть $S_\alpha(x)$ – линейный сглаживающий сплайн, **минимизирующий** функционал $J_\alpha(f)$.

Обозначим $S_\alpha(x_i) = S_i$, $i = \overline{1,n}$, $\vec{S} = (S_1, .., S_n)^{\mathrm{T}}$.
Имеем

$$J_\alpha(S_\alpha(x)) = J_\alpha(\vec{S}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - S_i)^2}{\sigma_i^2} + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{h_i}(S_{i+1} - S_i)^2.$$

Откуда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_\alpha}{\partial S_1} = \frac{S_1 - y_1}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha}{h_1}\cdot(S_1 - S_2) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_\alpha}{\partial S_i} = \frac{S_i - y_i}{\sigma_i^2} + \frac{\alpha}{h_{i-1}}(S_i - S_{i-1}) + \frac{\alpha}{h_i}(S_i - S_{i+1}) = 0, \quad i = \overline{2, n-1},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_\alpha}{\partial S_n} = \frac{S_n - y_n}{\sigma_n^2} + \frac{\alpha}{h_{n-1}}\cdot(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Следовательно, для определения искомого вектора $\vec{S}$ получаем систему

$$A\vec{S} = \vec{F}, \tag{3}$$

где $(n \times n)$ – симметричная трехдиагональная матрица A – дается равенством:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha}{h_1} & -\frac{\alpha}{h_1} & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{h_1} & \frac{1}{\sigma_2^2} + \alpha(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}) & -\frac{\alpha}{h_2} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ & & ..... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\frac{\alpha}{h_{n-1}} & \frac{1}{\sigma_n^2} + \frac{\alpha}{h_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{F} = \left(\frac{y_1}{\sigma_1^2}, .., \frac{y_n}{\sigma_n^2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Матрица A – положительно определенная с диагональным преобладанием. Следовательно, существует единственное решение $\vec{S}$ системы (3), которое, в частности, можно найти с помощью метода прогонки.

Построим теперь линейный сглаживающий сплайн с закреплением крайних точек, т.е. предполагается выполнение условий: $S_\alpha(x_1) = y_1$, $S_\alpha(x_n) = y_n$, где y_1 и y_2 фиксированы.

Определим линейный сглаживающий сплайн как решение экстремальной задачи

$$\min \tilde{J}_\alpha(S(x)), \quad S(x_1) = y_1, \quad S(x_n) = y_2, \tag{4}$$

где

$$\tilde{J}_\alpha(S(x)) = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(y_i - S(x_i))^2}{\sigma_i^2} + \alpha \cdot \int_{x_1}^{x_n} S'^2(x)\,dx.$$

Обозначим $\vec{S}_0 = (S_2, .., S_{n-1})^{\mathrm{T}}$. Имеем

$$\tilde{J}_\alpha(\vec{S}_0) = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(y_i - S_i)^2}{\sigma_i^2} + \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{h_i}(S_{i+1} - S_i)^2.$$

Откуда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{J}_\alpha(S_0)}{\partial S_2} = \frac{S_2 - y_2}{\sigma_2^2} + \frac{\alpha}{h_1}(S_2 - y_1) + \frac{\alpha}{h_2}(S_2 - S_3) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{J}_\alpha(\vec{S}_0)}{\partial S_i} = \frac{S_i - y_i}{\sigma_i^2} + \frac{\alpha}{h_{i-1}}(S_i - S_{i-1}) + \frac{\alpha}{h_i}(S_i - S_{i+1}) = 0, \quad i = \overline{3, n-2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{J}_\alpha(\vec{S}_0)}{\partial S_{n-1}} = \frac{S_{n-1} - y_{n-1}}{\sigma_{n-1}^2} + \frac{\alpha}{h_{n-2}}(S_{n-1} - S_{n-2}) + \frac{\alpha}{h_{n-1}}(S_{n-1} - y_n) = 0.$$

Следовательно, для определения вектора $\vec{S}_0$ получаем систему

$$A_0 \cdot \vec{S}_0 = \vec{F}_0, \tag{5}$$

где $(n-2)\times(n-2)$ – симметричная трехдиагональная матрица A_0 дается равенством:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_2^2} + \alpha\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) & -\frac{\alpha}{h_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{h_2} & \frac{1}{\sigma_3^2} + \alpha\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & -\frac{\alpha}{h_3} & 0 & 0 \\ & & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{h_{n-2}} & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2} + \alpha\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_0 = \left(\frac{y_2}{\sigma_2^2} + \frac{\alpha}{h_1}y_1, \frac{y_3}{\sigma_3^2}, \quad , \frac{y_{n-2}}{\sigma_{n-2}^2}, \frac{y_{n-1}}{\sigma_{n-1}^2} + \frac{\alpha}{h_{n-1}}y_n\right)^{\mathrm{T}}.$$

Матрица A_0 – положительно определенная с диагональным преобладанием. Следовательно, существует единственное решение системы (5), которое, в частности, можно найти с помощью метода прогонки.

Значение линейного сглаживания сплайна $S_\alpha(x)$ в этом случае будут определяться равенствами:

$$S_\alpha(x_1) = y_1, \quad S_\alpha(x_i) = S_i, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad S_\alpha(x_n) = y_n.$$

Робастные линейные сглаживающие сплайны

Для построения РЛСС применим схему получения робастных M-оценок [4–6].

Рассмотрим робастный функционал

$$J_\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{y_i - S(x_i)}{\sigma_i}\right) + \alpha \int_{x_1}^{x_n} S'^2(x)\,dx, \tag{6}$$

где $\rho(x)$ – четная, дифференцируемая функция, неубывающая для $x > 0$, причем $\rho(0) = 0$, $\rho(x) \approx x^2$ для малых $|x|$.

Аналогично лемме 2 доказывается, что в классе кусочно-непрерывно дифференцируемых функций, функция, доставляющая минимум функционалу (6), – линейный сплайн $S_\alpha(x)$.

Обозначим: $S_\alpha(x_i) = S_i$, $\vec{S} = (S_1, \quad , S_n)^{\mathrm{T}}$, $J_\alpha(\vec{S}) = J_\alpha(S_\alpha(x))$.

Возьмем в качестве $\rho(x)$ функцию Хьюбера [5]

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le K; \\ 2 \cdot K \cdot |x| - K^2, & |x| > K. \end{cases}$$

Возьмем три множества индексов

$$I_0(\vec{S}) = \{i \cdot |y_i - S_i| \le K\sigma_i\},$$

$$I_+(\vec{S}) = \{i : y_i - S_i > K\sigma_i\},$$

$$I_-(\vec{S}) = \{i : y_i - S_i < -K\sigma_i\}. \tag{7}$$

Каждый индекс $i = \overline{1, n}$ входит в одно и только **в одно из** множеств $I_0(\vec{S})$, $I_+(\vec{S})$, $I_-(\vec{S})$.

Имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_\alpha(\vec{S})}{\partial S_1} = \frac{S_1 - \tilde{y}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha}{h_1}(S_1 - S_2) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_\alpha(\vec{S})}{\partial S_i} = \frac{S_i - \tilde{y}_i}{\sigma_i^2} + \frac{\alpha}{h_i}(S_i - S_{i+1}) + \frac{\alpha}{h_{i-1}}(S_i - S_{i-1}) = 0, \quad i = \overline{2, n-1},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_\alpha(\vec{S})}{\partial S_n} = \frac{S_n - \tilde{y}_n}{\sigma_n^2} + \frac{\alpha}{h_{n-1}}(S_n - S_{n-1}) = 0, \tag{8}$$

где

$\tilde{y}_i = y_i$, если $i \in I_0(\vec{S})$,

$\tilde{y}_i = S_i + K\sigma_i$, если $i \in I_+(\vec{S})$,

$$\tilde{y}_i = S_i - K\sigma_i, \text{ если } i \in I_-(\vec{S}).$$

Следовательно, для определения искомого вектора $\vec{S}$ получаем систему

$$A\vec{S} = \vec{\tilde{F}}, \tag{9}$$

где A определена в равенстве (3), а $\vec{\tilde{F}} = \left(\frac{\tilde{y}_1}{\sigma_1^2}, \ldots, \frac{\tilde{y}_n}{\sigma_n^2}\right)^{\mathrm{T}}$.

Система (9) нелинейна, поскольку компоненты вектора $\vec{\tilde{F}}$ зависят от искомого решения $\vec{S}$.

Для решения системы (9) используем эффективный итерационный процесс

$$A\vec{S}^{(l+1)} = \vec{F}^{(l)}, \tag{10}$$

где $\vec{F}^{(l)} = \left(\frac{y_1^{(l)}}{\sigma_1^2}, \ldots, \frac{y_n^{(l)}}{\sigma_n^2}\right)^{\mathrm{T}}$,

$$y_i^{(l)} = y_i, \text{ если } i \in I_0(\vec{S}^{(l)}),$$
$$y_i^{(l)} = S_i^{(l)} + K\sigma_i, \text{ если } i \in I_+(\vec{S}^{(l)}),$$
$$y_i^{(l)} = S_i^{(l)} - K\sigma_i, \text{ если } i \in I_-(\vec{S}^{(l)}),$$

а множества $I_0(\vec{S}^{(l)})$, $I_+(\vec{S}^{(l)})$, $I_-(\vec{S}^{(l)})$ определены равенствами (7).

В качестве начального $\vec{F}^{(0)}$ рекомендуется брать

$$\vec{F}^{(0)} = \vec{F} = \left(\frac{y_1}{\sigma_1^2}, \ldots, \frac{y_n}{\sigma_n^2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Рекомендации по выбору значения параметра Хьюбера K соответствуют рекомендациям работ [5, 6].

Аналогично строится итерационная процедура нахождения робастного линейного сглаживающего сплайна с фиксацией крайних точек $S_\alpha(x_1) = y_1$, $S_\alpha(x_n) = y_n$:

$$A_0\vec{S}_0^{(l+1)} = \vec{F}_0^{(l)}, \tag{11}$$

где

$$\vec{S}_0^{(l)} = (S_2^{(l)}, \ldots, S_{n-1}^{(l)})^{\mathrm{T}},$$

$$\vec{F}_0^{(l)} = \left(\frac{y_2^{(l)}}{\sigma_2^2} + \frac{\alpha}{h_1}y_1, \frac{y_3^{(l)}}{\sigma_3^2}, \ldots, \frac{y_{n-2}^{(l)}}{\sigma_{n-2}^2}, \frac{y_{n-1}^{(l)}}{\sigma_{n-1}^2} + \frac{\alpha}{h_{n-1}}y_n\right)^{\mathrm{T}},$$

$$y_i^{(l)} = y_i, \text{ если } i \in I_0(\vec{S}_0^{(l)}),$$
$$y_i^{(l)} = S_i^{(l)} + K\sigma_i, \text{ если } i \in I_+(\vec{S}_0^{(l)}),$$
$$y_i^{(l)} = S_i^{(l)} - K\sigma_i, \text{ если } i \in I_-(\vec{S}_0^{(l)}),$$
$$i = \overline{2, n-1}.$$

Отметим, что робастные M-оценки, полученные с помощью функции Хьюбера, предполагают симметрию больших выбросов относительно сглаженной робастной кривой. В условиях нарушения симметрии, когда, например, количество больших выбросов мало, необходимо вместо функции Хьюбера использовать функцию

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \le R; \\ R^2, & |x| > R. \end{cases} \tag{12}$$

Введем два множества индексов:

$$I_0(\vec{S}) = \{i : |y_i - S_i| \le R\sigma_i\},$$
$$I_B(\vec{S}) = \{i : |y_i - S_i| > R\sigma_i\} \tag{13}$$

и функционал $J_\alpha(\vec{S})$ (6), где $\rho(x)$ определена равенством (12).

Каждый индекс $i = \overline{1, n}$ принадлежит одному и только одному из множеств $I_0(\vec{S})$, $I_B(\vec{S})$.

Для производных $\frac{1}{2}\frac{\partial J_\alpha(\vec{S})}{\partial S_i}$, $i = \overline{1, n}$ имеем равенства (8), где

$$\tilde{y}_i = y_i, \text{ если } i \in I_0(\vec{S}),$$

$$\tilde{y}_i = S_i, \text{ если } i \in I_B(\vec{S}). \tag{14}$$

Следовательно, для определения вектора $\vec{S}$ получаем систему (9), где компоненты вектора $\vec{\tilde{F}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)^{\mathrm{T}}$ даются равенствами (14).

Для решения системы (9), (14) используем **эффективный** итерационный процесс

$$A\vec{S}^{(l+1)} = \vec{F}^{(l)}, \tag{15}$$

где $\vec{F}^{(l)} = \left(\frac{y_1^{(l)}}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{y_n^{(l)}}{\sigma_n^2} \right)^{\mathrm{T}}$,

$$y_i^{(l)} = y_i, \text{ если } i \in I_0(\vec{S}^{(l)}),$$
$$y_i^{(l)} = S_i^{(l)}, \text{ если } i \in I_B(\vec{S}^{(l)}),$$

а множества $I_0(\vec{S}^{(l)})$, $I_B(\vec{S}^{(l)})$ определены равенствами (13).

Аналогично строится итерационная процедура нахождения робастного линейного сглаживающего сплайна с нейтрализацией больших выбросов в условиях нарушения симметрии и с фиксацией крайних точек $S_\alpha(x_1) = y_1$, $S_\alpha(x_n) = y_n$:

$$A_0\vec{S}_0^{(l+1)} = \vec{F}_0^{(l)}, \tag{16}$$

где

$$\vec{S}_0^{(l)} = (S_2^{(l)}, \dots, S_{n-1}^{(l)})^{\mathrm{T}},$$
$$\vec{F}_0^{(l)} = \left(\frac{y_2^{(l)}}{\sigma_2^2} + \frac{\alpha}{h_1} y_1, \frac{y_3^{(l)}}{\sigma_3^2}, \dots, \frac{y_{n-2}^{(l)}}{\sigma_{n-2}^2}, \frac{y_{n-1}^{(l)}}{\sigma_{n-1}^2} + \frac{\alpha \cdot y_n}{h_{n-1}} \right)^{\mathrm{T}}.$$
$$y_i^{(l)} = y_i, \text{ если } i \in I_0(\vec{S}^{(l)}),$$
$$y_i^{(l)} = S_i^{(l)}, \text{ если } i \in I_B(\vec{S}^{(l)}),$$
$$i = \overline{2, n-1},$$

а множества $I_0(\vec{S})$, $I_B(\vec{S})$ определены равенствами (13).

Приведем один из примеров использования РЛСС при решении задачи оперативного управления портфелем инвестиций на российском рынке государственных краткосрочных облигаций (ГКО).

Пусть на рассматриваемую дату все выпуски ГКО пронумерованы индексом $i = \overline{1, n}$. Обозначим через P_i, $i = \overline{1, n}$ цену i-го выпуска (в процентах от номинальной стоимости), имеющего на рассматриваемую дату срок до погашения τ_i дней. Тогда совокупность точек (τ_i, P_i), $i = \overline{1, n}$ описывает состояние рынка ГКО на рассматриваемую дату [7].

Согласно определению, сглаженная совокупность точек $(\tau_i, P_{\mathrm{smo}i})$, $i = \overline{1, n}$ образует текущее равновесное состояние рынка ГКО. Здесь $P_{\mathrm{smo}i}$ – сглаженное значение цены i-го выпуска на текущую дату.

Выпуски, для которых $P_i > P_{\mathrm{smo}i}$ $(P_i < P_{\mathrm{smo}i})$, называются переоцененными (недооцененными) рынком.

Динамическое управление портфелем выпусков ГКО состоит в перевложении средств из переоцененных выпусков в недооцененные [7].

Заметим, что операцию сглаживания дискретной совокупности "экспериментальных" точек (τ_i, P_i), $i = \overline{1, n}$ можно производить не только с помощью РЛСС, но и используя робастные ортогональные полиномы [7].

Литература

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
3. *Василенко В.А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981.
5. *Крянев А.В.* Применение современных методов параметрической и непараметрической статистики при обработке данных экспериментов на ЭВМ. М.: МИФИ, 1987.
6. *Крянев А.В.* Применение современных методов математической статистики при восстановлении регрессионных зависимостей на ЭВМ. М.: МИФИ, 1988.
7. *Крянев А.В., Черный А.И.* Равновесие на рынке ГКО: теория и практика// Рынок ценных бумаг. Аналитический журнал, 14, 1996, с.30-32.

Александр Витальевич Крянев
Александр Иванович Черный

РОБАСТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СГЛАЖИВАЮЩИЕ

СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Рукопись поступила в издательский отдел 27.01.97

Ответственный за выпуск А.В.Крянев

Редактор Н.Н.Антонова

ЛР № 020676 от 09.12.92.
Подписано в печать 03.02.97 Формат 60x84 1/16
Уч.-изд.л. 1,0 Печ.л. 1,0 Тираж 100 экз
Изд. № 006-97 Заказ № 26

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет)

Типография МИФИ

115409, Москва, Каширское шоссе, 31