



А.В. Крянев В.В. Матохин
С.Г. Климанов

010-98

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ
В ЭКОНОМИКЕ**

Москва 1998

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ИЗДАНИЕ
89-010.1

А.В.Крянев В.В.Матохин С.Г.Климанов

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
РЕСУРСОВ В ЭКОНОМИКЕ**

Препринт 010-98

*Рекомендован к изданию
редсоветом института*

Москва 1998

УДК 519.8
5БК
К85

Крянев А.В., Матохин В.В., Климанов С.Г. **Статистические функции распределения ресурсов в экономике.** М.: Препринт/МИФИ, 010-98, 1998. -16 с.

Представлен вывод статистических функций распределения ресурсов из функции управления, используемой для интерполяции диаграмм Лоренца. Показано, что плавное изменение степени нелинейности распределения ресурсов приводит к принципиальным различиям в статистических функциях, обосновывая особое место распределения, соответствующего окружности на плоскости Лоренца. Материал препринта используется в учебном процессе экономико-аналитического института МИФИ.

ISBN 5-7262-0253-8

© Крянев А.В., Матохин В.В.,
Климанов С.Г., 1998.

© Московский государственный
инженерно-физический институт
(технический университет),
1998.

1. Введение

Нахождение статистического распределения для любой подсистемы и является основной задачей статистики
Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц

Успех изучения и прогнозирования экономической жизни общества во многом связан с умением рассчитать средние значения \bar{f} различных функций, зависящих от конкретных действий людей по распределению доступных им ресурсов. Но изначально ясно, что реализация простой по сути процедуры

$$\bar{f} = \frac{\sum_{n=1}^N f(G_n)}{N} \quad (1)$$

(где G_n - экономическая величина, выполняющая роль аргумента и N - число суммируемых значений) сталкивается с принципиальными трудностями по единовременному сбору значительного объема экономической информации. Поставленная задача в методическом смысле подобна задаче определения термодинамических параметров газа (температуры, давления и т.п.) в отсутствии точных данных о движении каждой из частиц. Поэтому представляется целесообразным воспользоваться накопленным опытом и заменить суммирование в формуле (1) интегрированием произведения функции f и статистической функции распределения $\rho(G)$, описывающей состояние ансамбля в виде вероятностного распределения количества частиц в любом интервале значений аргумента $(G, G+dG)$:

$$\bar{f} = \int f(G)\rho(G)dG \quad (2)$$

Очевидно, что методическая привлекательность использования подобной процедуры в микроэкономике может быть в полной мере реализована при корректном выборе экономических "атомов" - "самых простых, исходных, далее неразделимых в своих действиях, экономических единиц"[1]. В этой связи обратим внимание на табличное пред-

"Номенклатура"	"Структура"
Позиция - 1	G_1
Позиция - 2	G_2
...	...
Позиция - n	G_n
...	...
Позиция - N	G_N
N	ΣN

Рис.1. Схематичное представление процесса распределения ресурсов

ставление процесса распределения ресурсов к определению количества клеток "Номенклатуры" (dn) в интервале значений ресурса ($G, G+dG$) из колонки "Структура".

В настоящее время уже известно более десяти представлений формулировок статистических функций распределения, связанных с обществом вообще и с экономикой в частности [2],[3],[4]. Многообразие представлений на фоне различной степени общепризнанности каждой из них стимулируют попытку определить вариант, в определенном смысле наилучший для анализа микроэкономического "газа". Сразу оговоримся, что, принимая во внимание изменения во времени исследуемого объекта, речь не идет о по-

ставление распределения на N позиций ресурса объемом S_N (рис.1). Опуская детальное обоснование наших действий, выберем в качестве "атома" клетку из колонки "Номенклатура". Тогда роль аргумента аналогичного импульсу n -й частицы в газе может быть приписана величине распределенного ресурса G_n . Таким образом, задача об определении статистической функции распределения $\rho(G)$ в микроэкономике сводит-

пытке свести экономику к идеализированному застывшему состоянию. Речь может идти только о попытке найти такое статистическое распределение, к которому общество постоянно стремится, но никогда в нем продолжительно не находится [4]. В каком-то смысле ситуация подобна маятнику, стремящемуся в процессе колебаний к точке покоя.

2. Диаграммы Лоренца

Упомянутое многообразие математических представлений статистических распределений заставляет изначально отказаться от еще одной прямой интерполяции исходных данных и предпринять попытку вывести функцию распределения из более общих принципов. Иными словами, исходные данные интегрируются сначала в систему, позволяя уменьшить влияние составных частей, далее выделяется основная компонента, а затем с помощью дифференциального исчисления находится искомая функция распределения. Конечно, такой способ вносит дополнительную погрешность, особенно на этапе аппроксимации. Но, с другой стороны, использование предварительного интегрирования исходных данных в систему позволяет проводить анализ распределений как единого статистического ансамбля и предоставляет, как видно будет из дальнейшего, дополнительные возможности по исследованию экономических решений.

В связи с вышеизложенным представим исходные данные о распределении ресурса $\{G_n\}$ в виде диаграмм Лоренца [5],[6],[7]. Для этого предварительно проведем ранжирование исходного исследуемого ряда $G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_N$. Затем рассчитаем накопленные суммы

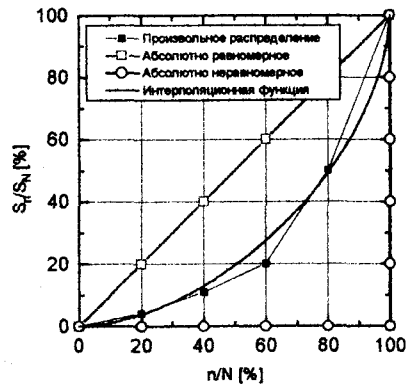


Рис.2. Представление решений о распределении ресурса в виде диаграмм Лоренца

для вывода искомой функции распределения. Поэтому необходимо аппроксимировать реальную диаграмму соответствующей аналитической кривой (пунктирная линия на рис.2.).

3. Функция управления ресурсами

При использовании теории интерполяции для решения прикладных задач хорошо известен тот факт, что наилучшие результаты получаются в случае, если интерполяционные функции органично связаны с сутью самого процесса. В этой связи представляется целесообразным учесть два аспекта: экспериментальный и теоретический.

В качестве первого аргумента в пользу выбора определенного семейства интерполяционных кривых приведем диаграммы Лоренца (рис.3), построенные для шести ежегодных (1988 -1993 г.г.) конкурсных распределений средств

$$S_n = \sum_{k=1}^n G_k \quad (3)$$

и представим полученные результаты в виде графика на плоскости с осями $x=n/N$ и $y= S_n/S_N$ (сплошная ломаная линия на рис.2).

Отметим, что кусочно-линейный характер диаграммы Лоренца не позволяет применить на всем промежутке $x \in (0,1)$ аналитическое дифференцирование, необходимое нам

S_N по N проектам государственной научно-технической программы "Высокотемпературная сверхпроводимость".

Удивительная стабильность диаграмм Лоренца при значительных изменениях в программе (см.табл.)

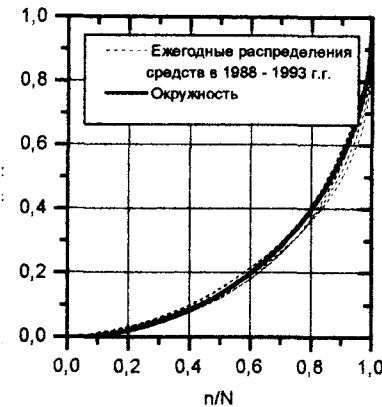


Рис.3. Диаграммы Лоренца для ежегодных распределений средств между проектами

Год	N	S _N (млн.руб.)
1988	273	143.1
1989	362	137.6
1990	432	136.9
1991	553	109.4
1992	345	411.2
1993	353	930

позволяет определить в качестве одной из возможных интерполяционных функций окружность (сплошная линия на рис.3):

$$\left(1 - \frac{S_n}{S_N}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2 = 1. \quad (4)$$

В качестве еще одного аргумента в пользу использования кривых типа (4) для аппроксимации диаграмм Лоренца можно сослаться на вид производственной функции с постоянной эластичностью замещения (ПЭЗ) [10]:

$$V = (A * K^{-\alpha} + B * L^{-\alpha})^{-1/\alpha}, \quad (5)$$

где V - выпуск, K и L - затраты капитала и труда соответственно, A и B - коэффициенты.

Действительно, переписав выражение (5) в виде

$$\left(A^{1/\alpha} \frac{V}{K}\right)^\alpha + \left(B^{1/\alpha} \frac{V}{L}\right)^\alpha = 1, \quad (6)$$

можно отметить его подобие формуле (4) при $\alpha=2$.

Обобщая (4) и (6), получим семейство равенств

$$\left(1 - \frac{S_n}{S_N}\right)^\alpha + \left(\frac{n}{N}\right)^\alpha = 1. \quad (7)$$

Вообще говоря, при построении диаграмм Лоренца не оговаривается наличие функциональной связи между величинами $y=S_n/S_N$ и $x=n/N$. Но принимая во внимание взаимозависимость колонок "Номенклатура" и "Структура" (см. рис.1) как составных частей задачи целенаправленного распределения ресурсов, введем понятие функции управления ресурсами $y(x, \alpha) = S_n/S_N = f(n/N)$ и перепишем выражение (7) в виде

$$[1 - y(x, \alpha)]^\alpha + x^\alpha = 1. \quad (8)$$

Очевидно, что параметр $1 \leq \alpha < \infty$ определяет степень нелинейности распределения ресурса и в данном смысле является эквивалентом коэффициента Джини

$$K_G = 1 - 2 \int_0^1 y(x, \alpha) dx, \quad 0 \leq K_G \leq 1. \quad (9)$$

Причем $\alpha=1$ соответствует абсолютно равномерному распределению (биссектриса квадрата на рис.2), а при $\alpha \rightarrow \infty$ распределение стремится к абсолютно неравномерному (скачок графика в точке $x=1$ на рис.2).

4. Семейство статистических функций распределения ресурсов

Применительно к простейшей статистической системе с одним аргументом вероятность попадания dw величины G , определяющей распределение, в интервал $(G, G+dG)$ определяется в виде доли dn интересующих нас событий по отношению к общему числу позиций N

$$dw = \frac{dn}{N}. \quad (10)$$

Перепишем выражение (10) в виде

$$dw = \frac{dn}{N} * \frac{dG}{dG} = \left(\frac{1}{N} \frac{dn}{dG}\right) dG = \rho(G) dG. \quad (11)$$

Таким образом, для определения искомой статистической функции распределения (плотности распределения вероятностей) $\rho(G)$ нам предстоит определить величину dn/dG .

Сделаем это в несколько этапов:

1. Принимая во внимание возможность замены накопленной суммы (3) на

$$S_n = \int_0^n G_n dn \quad (12)$$

при достаточно большом числе позиций в распределении ресурса ($N \rightarrow \infty$), определим из (7) зависимость $G = dS_n/dn = f(n)$.

2. Затем найдем обратную функцию $n = f^{-1}(G)$.

3. Наконец определим искомую функцию dn/dG .

Для конкретизации дальнейших выкладок возьмем функции управления ресурсами в виде

$$y(x, \alpha) = 1 - (1 - x^\alpha)^{1/\alpha}. \quad (13)$$

Очевидно, что функция управления $y=y(x,\alpha)$ определена на плоскости (x,y) в области $L=\{(x,y); 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1, y \leq x\}$ и является монотонно возрастающей, непрерывно дифференцируемой, выпуклой вниз функцией, принимающей значения $y=y(0,\alpha)=0, y=y(1,\alpha)=1$ для $1 < \alpha < \infty$.

Тогда

$$\frac{dy(x,\alpha)}{dx} = \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = F(x) \text{ при } \alpha > 1. \quad (14)$$

Отметим, что смысл равенства (14) раскрывается более полно, если произвести обратную замену переменных x и y на исходные величины:

$$g = \frac{dy(x,\alpha)}{dx} = \frac{dS_n}{S_n} * \frac{N}{dn} = \frac{G_n}{G}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что полученная производная g является величиной ресурса, приведенной к среднему $\bar{G} = S_N / N$.

Из (14) следует, что производная $g = F(x)$ монотонно возрастающая функция, и следовательно существует обратная монотонно возрастающая функция $x = F^{-1}(g), F^{-1}(0)=0$.
Имеем

$$x = F^{-1}(g, \alpha) = \frac{g^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\left(1 + g^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{1/\alpha}}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что $F(g, \alpha) \rightarrow 1$ при $g \rightarrow +\infty$, и поэтому $F(g, \alpha)$ является функцией распределения положительной случайной величины $g > 0$.

Тогда для статистической функции распределения (плотности распределения вероятности) имеем равенство

$$\rho(g, \alpha) = \frac{dF^{-1}(g, \alpha)}{dg} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{g^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}}{\left(1 + g^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \quad (17)$$

Графики $\rho(g, \alpha)$ и соответствующих функций управления для различных значений $\alpha > 1$ приведены на рис.4,5.

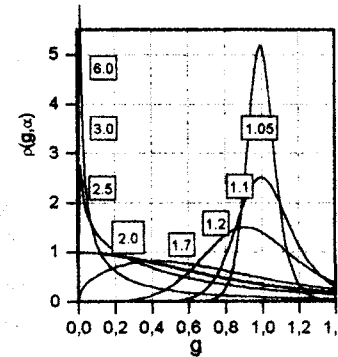


Рис.4. Семейство статистических функций распределения ресурсов для различных α

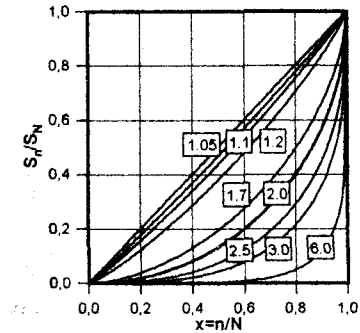


Рис.5. Функции управления, соответствующие статистическим функциям на рис.4

В зависимости от параметра нелинейности распределения ресурсов α семейство плотностей $\rho(g, \alpha)$ распадается на классы с различными свойствами:

1. Если $1 < \alpha < 2$, то $\rho(0, \alpha)=0$ и $\rho(g, \alpha)$ – унимодальная ограниченная плотность.

Пусть $\alpha=1+\epsilon$, где $\epsilon \rightarrow +0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\rho(g, \alpha) \sim \frac{1}{\epsilon} \frac{g^{\frac{1}{\epsilon}}}{\left(1 + g^{\frac{1}{\epsilon}}\right)^2} \rightarrow \delta(g-1) \text{ при } \epsilon \rightarrow +0. \quad (18)$$

2. Если $\alpha=2$, то $\rho(0,2)=1$ и $\rho(g,2)$ – монотонно убывающая функция с одной точкой перегиба

$$\rho(g,2) = \frac{1}{(1+g^2)^{3/2}}. \quad (19)$$

3. Если $\alpha>2$, то $\rho(g,\alpha)$ – монотонно убывающая, выпуклая вниз функция, неограниченная в $g=0$ ($\rho(g,\alpha)\rightarrow\infty$ при $g\rightarrow+0$).

Пусть $\alpha\rightarrow\infty$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\rho(g,\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} \frac{1}{g^{1-\frac{1}{\alpha}} \left(1+g^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}}, \quad (20)$$

т. е. $\rho(g,\alpha)\rightarrow\delta_+(g)$ при $\alpha\rightarrow+\infty$ где $\delta_+(g)=0$ для $g>0$ и

$$\int_0^a \delta_+(g) dg = 1 \text{ для любого } a>0.$$

Таким образом, функция управления, которой на плоскости Лоренца соответствует окружность, играет роль границы, разделяющей плотности семейства $\rho(g,\alpha)$ на два класса. Более того, $\rho(g,2)$ – единственная плотность семейства $\rho(g,\alpha)$, $\alpha>1$ принимающая ограниченное ненулевое значение при $g=0$.

В заключение авторам хотелось выразить особую признательность В.М.Закосяренко, оказавшего принципиальное влияние на выбор направления исследования, представленного в данной работе.

Авторы благодарны Каряеву Е.В. за ряд ценных замечаний и Харитонову В.В. за благожелательное сотрудничество в процессе исследований и представлений данной работы.

И, наконец, авторы благодарят Козыреву А.Б., Вендика О.Г. и Вейцмана В.М. за усилия по поиску экономической и наукометрической литературы, придавшей работе необходимую связь с накопленным опытом в исследуемой области.

Литература

1. *Емцов Р.Г., Лукин М.Ю.* Микроэкономика: Учебник.-М.: МГУ им М.В.Ломоносова, Изд."ДИС", 1997.
2. *Хайтун С.Д.* Наукометрия: состояние и перспективы. М.:Наука, 1983.
3. *Трубников Б.А.* Закон распределения конкурентов. Природа, 1993, №11.
4. *Бялко А.В.* Конструктивность закона конкуренции. Природа, 1993, №11.
5. *Валери П.* Предисловия к "Персидским письмам". В Сб. об искусстве. М.: Искусство, 1993.
6. *Roger N.Waud.* Economics. New York: Harper&Row Publishers, 1990.
7. *Венецкий И.Г., Венецкая В.И.* Основные математические понятия и формулы в экономическом анализе. Справ. - 2-е изд., перераб. и доп. М: Статистика, 1979.
8. Математика и кибернетика в экономике: Словарь справочник/ Сост., *И.И. Гончарова, М.Б. Немчинова, А.А. Попова.*-М:Экономика, 1975.
9. Курс экономической теории. Под редакцией *Чепурина М.Н., Киселевой Е.А.* Киров: МГИМО МИД РФ, 1994.
10. *Леонтьев В.* Международное сопоставление факторных издержек и использования факторов. В кн. Экономические эссе: теории, исследования, факты и политика. М. Изд.политической литературы, 1990.

Александр Витальевич Крянев
Валентин Викторович Матохин
Сергей Геннадиевич Климанов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ЭКОНОМИКЕ

Рукопись поступила в издательский отдел 3.08.98.

Редактор Н.В.Шумакова

Ответственный за выпуск А.В.Крянев

ЛР №020676 от 29.12.97. Подписано в печать 07.09.98

Формат 60x84/16 Уч.-изд.л.1,0 Печ.л.1,0. Тираж 100 экз

Изд.№010-98 Заказ 766

Московский государственный инженерно-физический институт
/технический университет/

Типографии МИФИ. 115409, Москва, Каширское ш., 31