МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **8** номер **8** год **1996**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ИНВЕСТИЦИЙ

© *А.В. Крянев, А.И. Чёрный*

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет)

В работе изложены постановки оптимизационных задач математической теории инвестиций и описаны численные методы их решения.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEMS FOR MATHEMATICAL MODELS OF THE INVESTMENT THEORY

A.I. Cherny, A.V. Kryanev

Moscow state engineering physical institute (technical university)

In our work the formulations of the optimization problems for mathematical investment theory are presented and numerical methods for solution of these problems are described.

1. Постановки задач

В последние годы в нашей стране возрос научный интерес к постановке и решению различных оптимизационных задач математической теории инвестиций. Одним из основных классов такого рода задач являются задачи по формированию оптимального состава портфеля инвестиций (под портфелем инвестиций понимается совокупность элементов, в которые помещены инвестиции портфеля, включая вектор долей этих инвестиций). Оптимальность портфеля может пониматься в различных смыслах. Наиболее часто под оптимальным портфелем инвестиций понимается портфель, обеспечивающий максимум эффективности инвестиций при фиксированном значении риска. Предполагается, что предварительно определены понятия эффективностей и рисков как элементов, составляющих список портфеля, так и самого портфеля в целом.

Ниже предлагаются две математические постановки задачи оптимизации инвестиций, алгоритмы численных решений которых даны в следующем пункте статьи.

Пусть список портфеля инвестиций состоит из n элементов. Обозначим через R_i, $i=\overline{1,n}$ эффективность использования инвестиций, вложенных в i-й элемент; r_i - риск вложения инвестиций в i-й элемент; x_i - долю инвестиций портфеля, вложенных в i-й элемент.

В первой постановке задачи оптимизации используется гипотеза, согласно которой риск портфеля является линейной формой (взвешенной суммой) рисков элементов, составляющих портфель

$$r_p=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i =(\mathbf{r},\ \mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{r}=(r_i,...,r_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор рисков элементов, $\mathbf{x}=(x_i,...,x_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор долей элементов в портфеле.

Пусть эффективность портфеля Rp представлена в виде разности

$$Rp=(\mathbf{R},\ \mathbf{x})-R_{\text{зат}}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $\mathbf{R}=(R_1,...,R_n)^{\mathrm{T}}$ - вектор эффективностей элементов;

$$R_{\text{зат}}(\mathbf{x}) = \sum_{x_i > x_i^0} (x_i - x_i^0) f_1(x_i - x_i^0) \ + \sum_{x_i^0 > x_i} (x_i^0 - x_i)\, f_2(x_i^0 - x_i)\ ,$$

$\mathbf{x}^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)^{\mathrm{T}}$ - вектор долей элементов старого состава портфеля.

При решении прикладных задач математической теории инвестиций функции затрат $f_1(S)$, $f_2(S)$ перехода от старого состава портфеля $\mathbf{x}^0$ к новому составу $\mathbf{x}$ - неотрицательные, кусочно постоянные и невозрастающие.

Вектор долей $\mathbf{x}$ удовлетворяет естественным условиям

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad i = \overline{1,n}\ , \tag{3}$$

а также дополнительным ограничениям, имеющим априорный характер и, в частности, учитывающим априорную информацию инвесторов

$$\mathrm{B}\mathbf{x}\geq\mathbf{b}, \tag{4}$$

где вектор $\mathbf{b}=(b_1,...,b_m)^{\mathrm{T}}$ и матрица $\mathrm{B}=(b_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ задаются.

Обозначим через $r_{p\ max}$, $r_{p\ min}$ максимальное и минимальное значения риска портфеля (1) при ограничениях (3), (4).

Сформулируем основную задачу оптимизации портфеля инвестиций в первой постановке: при фиксированном уровне риска портфеля $r_p \varepsilon[r_{p\ max}, r_{p\ min}]$, известном векторе долей старого состава портфеля $\mathbf{x}^0$ и при выполнении естественных условий (3) и априорных ограничений (4) найти вектор долей $\mathbf{x}$ портфеля нового состава, обеспечивающий максимальное значение эффективности инвестиций (2).

Математическая модель оптимизации портфеля в первой постановке имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{x}}\{(\mathbf{R},\mathbf{x}) - R_{зат}(\mathbf{x})\},\\
&(\mathbf{r},\mathbf{x}) = r_p \varepsilon [r_{p\,\max},\ r_{p\,\min}]\ ,\\
&x_i \geq 0,\quad i=\overline{1,n}\ ,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \mathbf{Bx} \geq \mathbf{b}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Следует отметить, что в первой постановке без дополнительных упрощающих предположений задача оптимизации портфеля инвестиций принадлежит к классу задач нелинейного программирования, поскольку несмотря на линейный характер ограничений (3), (4) целевой функционал (2) нелинеен и отличен от квадратичного. Более того, функционал (2) не является выпуклым и, следовательно, задача (5) не принадлежит к классу задач выпуклого программирования [1,2].

Отметим, что для решения задачи (5) необходимо предварительно найти минимальное $r_{p\ min}$ и максимальное $r_{p\ max}$ значения риска, решив соответственно следующие задачи линейного программирования:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{\mathbf{x}}(\mathbf{r},\mathbf{x}),\\
x_i \geq 0,\quad i=\overline{1,n}\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \mathbf{Bx} \geq \mathbf{b}\ ;
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$
\begin{cases}
\max\limits_{\mathbf{x}}(\mathbf{r},\mathbf{x}),\\
x_i \geq 0,\quad i=\overline{1,n}\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \mathbf{Bx} \geq \mathbf{b}.
\end{cases}
\tag{7}
$$

Задача (6) представляет самостоятельный интерес. Решение этой задачи $\mathbf{x}_{min}$ обеспечивает минимальное значение риска, причем эффективность портфеля при этом уровне риска может быть рассчитана согласно равенству

$$Rp= (\mathbf{R},\ \mathbf{x}_{min}) - R_{зат}(\mathbf{x}_{min}).$$

При постановке задач оптимизации инвестиций можно использовать определение риска, которое при подсчете риска портфеля дает не линейную, а квадратичную форму относительно долей элементов, составляющих портфель. Например, в схеме Марковитца эффективности элементов R_i трактуются как случайные величины, дисперсии которых принимаются за риски элементов [3]. Тогда, используя известное правило нахождения дисперсии линейной формы, для риска портфеля получаем равенство

$$r_p=\sigma^2(Rp)=(W\mathbf{x},\ \mathbf{x}),$$

где $Rp=(\mathbf{R},\ \mathbf{x})$, W - коварициoнная матрица случайного вектора **R**.

В качестве расчетной величины эффективности портфеля m_p берется математическое ожидание случайной величины Rp, т.е. $m_p=(\mathbf{m},\ \mathbf{x})$, где **m** - вектор математического ожидания случайного вектора **R**.

Задача оптимизации инвестиций во второй постановке состоит в нахождении такого вектора долей **x**, удовлетворяющего условиям (3), (4), для которого при фиксированном значении $m_p=(\mathbf{m},\ \mathbf{x})\ \varepsilon\ [m_{min},\ m_{max}]$ риск портфеля r_p принимает минимальное значение.

Математическая модель оптимизации портфеля во второй постановке имеет вид задачи квадратичного программирования:

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}}(\mathrm{W}\,\mathbf{x},\mathbf{x}), \\ (\mathbf{m},\mathbf{x}) = m_p \varepsilon [m_{p\,\min},\ m_{p\,\max}]\ , \\ x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,n}\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \mathrm{B}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}\ . \end{cases} \tag{8}$$

Для решения задачи (8) необходимо предварительно найти m_{min}, m_{max}, решив соответственно следующие задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}}(\mathbf{m},\mathbf{x}), \\ x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,n}\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \mathrm{B}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}\ ; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}}(\mathbf{m},\mathbf{x}), \\ x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,n}\ ,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \mathrm{B}\mathbf{x} \ge \mathbf{b}\ . \end{cases} \tag{10}$$

Задача (10) представляет самостоятельный интерес, поскольку дает возможность найти состав портфеля $\mathbf{x}_{max}$, обеспечивающий максимальное значение эффективности портфеля, причем риск портфеля в этом случае может быть подсчитан согласно равенству

$$r_p=(\mathrm{W}\mathbf{x}_{max},\ \mathbf{x}_{max}).$$

2. Алгоритмы численного решения оптимизационных задач теории инвестиций

Задачи (6), (7), (9), (10) являются задачами линейного программирования и могут быть решены с помощью стандартных алгоритмов, основанных, в частности, на симплекс-методе [4]. Однако, в ряде случаев, учитывая специальный вид ограничений (4) для задач оптимизации инвестиций, можно сконструировать более простые по сравнению с симплекс-методом и эффективные методы и основанные на них алгоритмы решения задач (6), (7), (9), (10). Они после простых изменений могут быть использованы и для решения задачи оптимизации инвестиций (5).

Действительно, часто при решении практических задач вся совокупность элементов $i=\overline{1,n}$ разбивается на k групп так, что каждый элемент входит в одну и только в одну группу. Для каждой j-й группы назначается верхняя $\beta_j \le 1$u нижняя $\alpha_j \ge 0$ границы суммы долей всех элементов, входящих в j-ю группу, $j=\overline{1,k}$.

Таким образом, совокупность неравенств (4) принимает вид

$$\alpha_j \le x_{ij1}+\ldots+x_{ijk_j} \le \beta_j,\ \ j=\overline{1,k}\ , \tag{11}$$

где $i_{j1} < i_{j2} < \ldots < i_{j\,kj}$.

Очевидно, система (3), (11) совместна тогда и только тогда, когда выполнены два неравенства

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j < 1, \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j > 1. \tag{12}$$

Рассмотрим для определенности задачу (6). Не умаляя общности, предположим, что выполнены неравенства $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$.

Реализуем следующий алгоритм решения задачи (6):

а) положим в каждой группе

$$x_{ij1} = \alpha_j, \ x_{ij2} = \ldots = x_{ijkj} = 0, \quad j = \overline{1,k};$$

б) произведем ранжировку номеров i_{j1}, $j = \overline{1,k}$ (ранжировку групп). Не умаляя общности, будем считать, что $i_{11} < i_{21} < \ldots < i_{k1}$;

в) проверяем выполнение неравенства

$$\beta_1 + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j \geq 1; \tag{13}$$

г) если (13) выполнено, то положим

$$x_{i11} = 1 - \sum_{j=2}^{k} \alpha_j,$$

не изменяя всех других значений x_i во всех группах. Полученный вектор x является решением задачи (6);

д) если (13) не выполнено, то положим $x_{i11} = \beta_1$ и проверяем выполнение неравенства

$$\beta_1 + \beta_2 + \sum_{j=3}^{k} \alpha_j \geq 1; \tag{14}$$

е) если (14) выполнено, то положим

$$x_{i2,1} = 1 - \beta_1 - \sum_{j=3}^{k} \alpha_j,$$

не изменяя всех других значений x_i во всех группах. Полученный вектор x является решением задачи (6);

ж) если (14) не выполнено, то положим $x_{i21} = \beta_2$ и проверяем выполнение неравенства

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \sum_{j=4}^{k} \alpha_j \geq 1;$$

и т.д.

В силу неравенств (12) вышеописанный процесс будет закончен не более чем через k шагов, причем полученный вектор x является решением задачи (6).

Итак, доказана

Лемма 1. *Если условия* (4) *имеют вид* (11), *то решение задачи* (6) *находится при реализации алгоритма а)-ж).*

Если условия (4) имеют вид (11), то решения задач (7), (9), (10) также находятся с помощью алгоритмов, аналогичных алгоритму а)-ж). Трансформация алгоритма а)-ж) для решения задач (7), (9), (10) очевидна. Более того, если условия (4) имеют вид (11), то решение задачи нелинейного программирования (5) может быть найдено с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму прямого и обратного хода а)-ж).

Численное решение обощенной задачи Марковитца (8) может быть реализовано с помощью перехода к двойственной задаче. В то же время при решении прикладных задач ковариационная матрица W часто является вырожденной или плохо обусловленной из-за достаточно сильной корреляции между компонентами случайного вектора эффективностей **R**. Поэтому необходимо предусмотреть регуляризацию некорректно поставленной задачи (8) в случае вырожденности или плохой обусловленности матрицы W [5].

Регуляризацию задачи (8) можно осуществить на основе учета дополнительной априорной информации об искомом векторе долей **x**.

Пусть задача оптимизации инвестиций решается в условиях существования старого состава $\mathbf{x}^0$ портфеля. Тогда вместо целевого функционала $(W\mathbf{x}, \mathbf{x})$ задачи (8) имеем целевой функционал

$$(W\mathbf{x},\ \mathbf{x}) + \alpha(V(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}^0),$$

где V- положительно-определенная матрица (обычно диагональная) коэффициентов затрат, необходимых для перехода от старого состава портфеля $\mathbf{x}^0$ к новому составу **x**, $\alpha>0$- параметр регуляризации [6].

Следовательно, вместо обощенной задачи Марковитца (8) имеем регуляризованную задачу квадратичного программирования

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}} \{(W\mathbf{x},\ \mathbf{x}) + \alpha(V(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\}, \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{a}, \end{cases} \tag{15}$$

где вся совокупность ограничений (3), (4) записана в виде системы неравенств $A\mathbf{x}\geq\mathbf{a}$, вектор $\mathbf{a}=(a_1,...,a_N)^T$ и $(N\times n)$ - матрица А известны, $N>n$.

Двойственная к (15) задача имеет вид

$$\min_{\mathbf{u}\geq 0} \{1/2(C_\alpha \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, \mathbf{a}_\alpha)\}, \tag{16}$$

где $W_\alpha=W+\alpha V$; $C_\alpha=A\cdot W_\alpha^{-1}\cdot A^T$ - $(N\times N)$ - симметричная неотрицательная матрица, причем

$$C_{ii}>0,\ i=\overline{1,N};\quad \mathbf{a}_\alpha=\mathbf{a}-\alpha\cdot AW_\alpha^{-1}V\mathbf{x}^0.$$

Решение **x** задачи (15) связано с решением **u** задачи (16) равенством

$$\mathbf{x}=W\alpha^{-1}A^T\mathbf{u}\ . \tag{17}$$

Для решения двойственной задачи (16) нами использован метод, подобный методу последовательных приближений Некрасова [7],

$$u_i^{(K+1)} = \max\{0, V_i^{(K+1)}\},$$

$$V_i^{(K+1)} = 1 / C_{ii} \left[a_i - \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} \mathbf{u}_j^{(K+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} C_{ij} \mathbf{u}_j^{(K)} \right], \tag{18}$$

$$i = \overline{1, N} ,$$

где C_{ij}, a_i - элементы матрицы C_α и вектора $\mathbf{a}_\alpha$ соответственно.

Лемма 2. *Последовательность* $\mathbf{u}^{(K)}$ *из* (18) *сходится к решению двойственной задачи* (16).

Схема доказательства леммы 2 аналогична схеме, приведенной, например, в [8].

3. Заключение

Математические модели задач оптимизации инвестиций могут принадлежать к классам задач линейного и нелинейного программирования в том числе невыпуклого. Для решения некоторых задач оптимизации инвестиций можно использовать известные алгоритмы решения экстремальных задач с ограничением. В то же время для решения многих задач оптимизации инвестиций требуется разработка новых методов и основанных на них алгоритмов, в том числе использующих априорную информацию о решении задач оптимизации.

В настоящее время коллективом сотрудников МИФИ и инвестиционной компании "ЛоРент" на основе представленных здесь математических моделей и алгоритмов разработаны пакеты прикладных программ, используемые для решения практических задач оптимизации инвестиций в различных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. - М.:Наука, 1980, 320 с.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.- М.: Мир, 1973, 280 с.
3. *Markowitz H.M.* - Mean variance analysis in portfolio choice and capital markets.-Basil, Blackwell, 1990, 310 p.
4. *Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А.* - Численные методы линейного программирования. - М.: Наука, 1977, 430 с.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.*- Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986, 288 с.
6. *Крянев А.В., Чёрный А.И.* Численные решения оптимизационных задач математической теории инвестиций. - М.: Препринт МИФИ 022-95, 1995, 16 с.
7. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматгиз, 1960, 650 с.
8. *Кюнци Г.П., Крюлле В.* Нелинейное программирование. - М.: Сов. радио, 1965, 270 с.

Поступила в редакцию
22.04.96