МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. В. Крянев А. И. Черный

009-96

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭФФЕКТИВНОСТЕЙ ИНВЕСТИЦИЙ

Москва 1996

Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию
Московский государственный инженерно-
физический институт
(технический университет)

А. В. Крянев   А. И. Чёрный

Математические модели взаимодействия эффективностей инвестиций

Препринт 009 -96

Рекомендовано к изданию редсоветом института.

Москва 1996

УДК 519.866:33
К 85

Крянев А. В., Чёрный А. И. **Математические модели взаимодействия эффективностей инвестиций.** М.: Препринт/**МИФИ**. 009-96, 1996. -12с.

Представлены математические модели, с помощью которых можно устанавливать связи между эффективностями различных классов, включая восстановление ковариационной матрицы эффективностей классов. Математические модели учитывают наличие связи эффективностей через регионы и отрасли, что позволяет выделить в характеристиках эмитентов наряду с собственными составляющими, составляющие, относящиеся к регионам и отраслям.

isbn 5-7262-0027-6

ВВЕДЕНИЕ

В нашей предыдущей работе [1] были рассмотрены задачи по формированию оптимальных портфелей инвестиций, для решения которых требуется знание ковариационных матриц вектора эффективностей эмитентов, образующих портфель. Для формирования ковариационных матриц эффективностей на практике, в том числе зарубежной [2-5], обычно используют однофакторную модель, согласно которой связь между эффективностями эмитентов осуществляется только через единый фактор - эффективность рынка в целом. Однако опыт применения такого подхода показывает, что однофакторная модель не позволяет учитывать всю гамму взаимодействий эффективностей, в частности, не учитывает взаимодействие через отрасли и, что особенно важно в условиях Российской Федерации, взаимодействие через регионы.

Следует подчеркнуть, что предлагаемая в настоящей работе многофакторная модель включает в себя как частный случай широко используемую однофакторную модель единого рынка и тем самым является обобщением однофакторной модели, существенно уточняя ее.

Обозначим через $R_i(t)$ $i=1,\dots,n$ эффективность i-го эмитента в момент времени t. Напомним, что R_i является случайной величиной, а $R_i(t)$ - случайная реализация R_i в момент t[1].

Предположим,что все эмитенты классифицированы по отраслям и регионам. Обозначим через $R^{(K)}(t)$, $R^{[e]}(t)$ эффективности к-й отрасли и l-го региона k=1, K, l=1,...,L, которые вычисляются как средневзвешенные эффективностей эмитентов, образующих k-ю отрасль и l-й регион соответсвенно:

$$R^{(k)}(t)=\sum_{\forall i} g_i \cdot R_i(t), \quad g_i=K_i / \sum_{\forall i} K_i,$$

$$R^{[e]}(t)= \sum_{\forall i'} g_{i'} \cdot R_{i'}(t), \quad g_{i'}=K_{i'} / \sum_{\forall i'} K_{i'},$$

где K_i - уставной капитал i-го эмитента, а суммирование производится по всем эмитентам, образующим k-ю отрасль и l-й регион соответственно.

В целях упрощения дальнейшего изложения предположим, что каждый эмитент принадлежит только одной отрасли и одному региону. Подчеркнем, что более общий случай, когда эмитент может принадлежать нескольким отраслям и нескольким регионам (например, эмитент состоит из нескольких предприятий, принадлежащих разным отраслям и регионам), рассматривается по схеме, аналогично нижеприведенной, но аналоги полученных ниже формул для этого случая становятся более громоздкими.

Рассмотрим i-й эмитент, принадлежащий k-й отрасли и l-му региону. Исходная математическая модель зависимостей эффективностей имеет вид:

$$\begin{cases} R_i=a_i+b_i^{(k)} \cdot R^{(k)}+b_i^{[l]} \cdot R^{[l]}+b_{i,M} \cdot R_M+E_i, \\ R^{(k)}=a^{(k)}+b_M^{(k)} \cdot R_M+E^{(k)}, \\ R^{[l]}=a^{[l]}+b_M^{[l]} \cdot R_M+E^{[l]}, \end{cases} \qquad (1)$$

где R_M - эффективность рынка в целом, равная:

$$R_M(t)= \sum_{i=1}^{n} W_i \cdot R_i(t), \quad W_i=K_i / \sum_{i=1}^{n} K_i ,$$

$ME_i=ME^{(k)}=ME^{[l]}=0$, ME_i - математическое ожидание E_i.

Таким образом, согласно многофакторной двухступенчатой модели (1) зависимость R_i от рынка осуществляется не только непосредственно, но и через зависимость от эффективностей отрасли и региона, к которым принадлежит рассматриваемый эмитент.

Ниже будет показано, что математическая модель (1) позволяет естественным образом выделять составляющие коэффицентов α, β, R^2 и рисков для рассматриваемого эмитента, отнесенные к отрасли, к региону и непосредственно к рынку. Тем самым математическая модель (1) дает возможность рассчитывать вклад отрасли, региона и непосредственно рынка в каждый из экономических показателей α, β, R^2 и риск для любого эмитента.

Обозначим через $R_{i0}=R_i-MR_i$, $R_0^{(k)}=R^{(k)}-MR^{(k)}$, $R_0^{[l]}=R^{[l]}-MR^{[l]}$, $R_{M0}=R_M-MR_M$ центрированные эффективности. Тогда уравнения системы (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} R_{i0}=b_i^{(k)} R_0^{(k)}+b_i^{[l]} \cdot R_0^{[l]}+b_{i,M} \cdot R_{M0}+E_i, \\ R_0^{(k)}=b_M^{(k)} \cdot R_{M0}+E^{(k)}, \\ R_0^{[k]}=b_M^{[k]} \cdot E^{[l]}, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} a_i=MR_i-b_i^{(k)} \cdot MR^{(k)}-b_i^{[l]} \cdot MR^{[l]}- b_{i,M} \cdot MR_M, \\ a^{(k)}=MR^{(k)}-b_M^{(k)} \cdot MR_M, \\ a^{[l]}=MR^{[l]}-b_M^{[l]} \cdot MR_M. \end{cases} \qquad (3)$$

Следовательно, МНК - оценки искомых коэффицентов даются равенствами [6-8]:

$$\vec{b}=K_R^{-1} \cdot \vec{cov}(R_i), \qquad (4)$$

$$\hat{b}_M^{(k)}=cov(R^{(k)},R_M)/\sigma^2(R_M) \quad (5)$$

$$\hat{b}_M^{[l]}=cov(R^{[l]},R_M)/\sigma^2(R_M), \quad (6)$$

где $\vec{b}=(b_i^{(k)},\ b_i^{[l]},\ b_{i,M})^T$,

$$K_R=\begin{vmatrix} \sigma^2(R^{(k)}) & cov(R^{(k)},R^{[l]}) & cov(R^{(k)}, R_M) \\ cov(R^{(k)},R^{[l]}) & \sigma^2(R^{[l]}) & cov(R^{[l]},R_M) \\ cov(R^{(k)}, R_M) & cov(R^{[l]},R_M) & \sigma^2(R_M) \end{vmatrix}$$

K_R^{-1} - обратная к симметричной, положительно определенной ковариационной матрице K_R,

$\vec{cov}(R_i)=(\ cov\ (R_i,R^{(k)}),\ cov\ (R_i,R^{[l]}),\ cov\ (R_i,R_M))^T$.

Подставляя полученные по формулам (4)-(6) оценки коэффициентов $\vec{b}$, $b_M^{(k)}$, $b_M^{[l]}$ в формулы (3), получаем МНК - оценки коэффицентов a_i, $a^{(k)}$, $a^{[l]}$.

Из формул (3)-(6) следует, что для получения оценок искомых коэффициентов необходимо предварительно подсчитать прямые оценки математических ожиданий MR_i, $MR^{(k)}$, $MR^{[l]}$, MR_M и моментов второго порядка $\sigma^2(R^{(k)})$, $\sigma^2(R^{[l]})$, $\sigma^2(R_M)$, $cov(R_i,\ R^{(k)})$, $cov(R_i,\ R^{[l]})$, $cov(R_i,\ R_M)$, $cov(R^{(k)},\ R^{[l]})$, $cov(R^{(k)},R_M)$, $cov(R^{[l]},\ R_M)$.

Например, для MR_i, $\sigma^2(R^{(k)})$, $cov(R_i,\ R_M)$, используем прямые оценки:

$$\begin{cases} MR_i=1/T\ \sum_{t=1}^{T} R_i(t), \\ \sigma^2(R^{(k)})=1/(T-1)\sum_{T=1}^{T}(R^{(k)}(t)-MR^{(k)})^2, \\ cov(R_i,\ R_M)=1/(T-1)\ \sum_{T=1}^{T}\ (R_i(t)-MR_i)(R_i(t)-MR_M). \end{cases} \quad (7)$$

Для получения прямых оценок других математических ожиданий и моментов второго порядка из вышеприведенного списка используем формулы, подобные формулам (7).

Согласно исходной модели (1) получаем равенство

$$R_i=\hat{\alpha}_i+\hat{\beta}_i\cdot R_M+\hat{E}_i, \quad (8)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_i=\hat{\alpha}_i^0+\hat{\alpha}_i^{(k)}+\hat{\alpha}_i^{[l]}, \\ \hat{\beta}_i=\hat{\beta}_i^0+\hat{\beta}_i^{(k)}+\hat{\beta}_i^{[l]}, \\ \hat{E}_i=\hat{E}_i^0+\hat{E}_i^{(k)}+\hat{E}_i^{[l]}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_i^{(0)}=\hat{a}_i, \quad \hat{\alpha}_i^{(k)}=\hat{b}_i^{(k)}\cdot\hat{a}^{(k)}, \quad \hat{\alpha}_i^{[l]}=\hat{b}_i^{[l]}\cdot\hat{a}^{[l]}, \\ \hat{\beta}_i^{(0)}=\hat{b}_{i,M},\ \hat{\beta}_i^{(k)}=\hat{b}_i^{(k)}\cdot\hat{b}_M^{(k)},\ \hat{\beta}_i^{[l]}=\hat{b}_i^{[l]}\cdot\hat{b}_M^{[l]}, \\ \hat{E}_i^0=\hat{E}_i, \quad \hat{E}_i^{(k)}=E^{(k)}\cdot\hat{b}_i^{(k)}, \quad \hat{E}_i^{[l]}=E^{[l]}\cdot\hat{b}_i^{[l]}. \end{cases} \quad (10)$$

Следовательно величины, входящие в (9), (10), имеют следующие значения:

$\hat{\alpha}_i$ - суммарный α- коэффицент i-го имитента, $\hat{\alpha}_i^0$ -вклад в α - коэффицент за счет прямой связи i-го эмитента с рынком; $\hat{\alpha}_i^{(k)}$ - вклад в α - коэффицент за счет связи i-го эмитента с рынком через отрасль, к которой принадлежит эмитент; $\hat{\alpha}_i^{[l]}$ - вклад в α - коэффициент за счет связи i-го эмитента с рынком через регион, к которому относится эмитент.

Аналогичные значения имеют составляющие β-коэффицента.

Из формул (8)-(10) следует представление для дисперсии (риска) i-го эмитента

$$\sigma^2=(R_i)=\sigma_i^2+\sigma_i^{(k)2}+\sigma_i^{[l]2}+\sigma_{i,M}^2, \qquad (11)$$

где

$\sigma_i^2=\sigma^2(E_i)$-составляющая риска из-за собственных независимых флуктуаций эффективности эмитента;

$\sigma_i^{(k)2}=\hat{b}_i^{(k)2}\cdot\sigma^2(E^{(k)})$- составляющая риска из-за собственных флуктуаций эффективности отрасли, к которой относится эмитент;

$\sigma_i^{[l]2}=\hat{b}_i^{[l]2}\cdot\sigma^2(E^{[l]})$- составляющая риска из-за собственных флуктуаций эффективности региона, к которому принадлежит эмитент;

$\sigma_{i,M}^2=\hat{\beta}_i^2\cdot\sigma^2(R_M)$- составляющая риска из-за флуктаций эффективности рынка в целом.

Представление полного риска i-го эмитента (11) позволяет ввести 4 коэффицента детерминации, аналогичные известному коэффиценту R - квадрат;

$r_i^0=\sigma_i^2/\sigma^2(R_i)$ -доля риска эмитента, вносимого собственными независимыми флуктуациями эффективности эмитента;

$r_i^{(k)}=\sigma^{(k)2}/\sigma^2(R_i)$- доля риска эмитента, вносимого собственными флуктуациями эффективности отрасли, к которой принадлежит эмитент;

$r_i^{[l]}=\sigma^{[l]2}/\sigma^2(R_i)$- доля риска эмитента, вносимого собственными флуктуациями эффективности региона, к которому относится эмитент;

$r_{i,M}=\sigma_{i,M}^2/\sigma^2(R_i)$- доля риска эмитента, вносимого флуктуациями эффективности рынка в целом.

Можно ввести также коэффицент $r_i=r_i^0+r_i^{(k)}+r_i^{[l]}$- доля риска эмитента из-за функций эффективностей, не зависящих от рынка в целом.

Очевидно справедливы равенства

$r_i+r_{i,M}=1$,

$r_i^0+r_i^{(k)}+r_i^{[l]}+ r_{i,M}=1$.

Полученные оценки коэффицентов модели (1) позволяют оценить ковариации между различными отраслями и регионами, что дает возможность проводить корреляционный анализ для отраслей и регионов.

Действительно, согласно модели (1) получаем искомые формулы

$\mathrm{cov}(R^{(k)}, R^{(k')})=b_M^{(k)}\cdot b_M^{(k')}\cdot\sigma^2(R_M)$,

$\mathrm{Kr}(R^{(k)}, R^{(k')})= \mathrm{Sign}(b_M^{(k)}\cdot b_M^{(k')})\cdot\sigma^2(R_M)\cdot$
$\cdot((\sigma^2(R_M)+\sigma^2(E^{(k)}))(\sigma^2(R_M)+\sigma^2(E^{(k')})))^{-0.5}$,

$\mathrm{cov}(R^{[l]}, R^{[l']})=b_M^{[l]}\cdot b_M^{(l']}\cdot\sigma^2(R_M)$,

$$Kr(R^{[l]}, R^{[l']}) = Sign(b_M^{[l]} \cdot b_M^{[l']}) \cdot \sigma^2(R_M) \times$$
$$\times((\sigma^2(R_M)+\sigma^2(E^{[l]}))(\sigma^2(R_M)+\sigma^2(E^{[l']})))^{-0.5},$$

$$cov(R^{(k)}, R^{[l]}) = b_M^{(k)} \cdot b_M^{[l]} \cdot \sigma^2(R_M),$$
$$Kr(R^{(k)}, R^{[l]}) = Sign(b_M^{(k)} \cdot b_M^{[l]}) \cdot \sigma^2(R_M) \times$$
$$\times((\sigma^2(R_M)+\sigma^2(E^{(k)}))(\sigma^2(R_M)+\sigma^2(E^{[l]})))^{-0.5},$$

где

$$Sign(L) = \begin{cases} 1, & L \geq 0 \\ -1, & L < 0, \quad k \neq k', \quad l \neq l', \end{cases}$$

$$Kr(R^{(k)}, R^{(k')}), \quad Kr(R^{[l]}, R^{[l']}), \quad Kr(R^{(k)}, R^{[l]})$$

- коэффиценты корреляции между отраслями К и К$'$, между регионами l и l$'$, между k-й отраслью и l-м регионом соответственно.

Заметим, что представленная двухступенчатая модель (1) позволяет более точно восстанавливать ковариационные матрицы эмитентов, входящих в оптимизационные задачи математической теории инвестиций [5].

Список литературы

1. Крянев А. В., Чёрный А. И. Численные решения оптимизационных задач математической теории инвестиций. М.: Препринт/МИФИ 022-95, 1995.
2. Duffie D. Security Markets: Stochastic models. Stanf. Univ. Press, 1988.
3. King B. Market and Industry Faktory Faktors in Stock Price Behavior. // Jour. of Business, 1966, v. 39, № 1, pp. 139-140.
4. Elton E. T., Gruber M. T. Portfolio Theory and Investment Analysis. N. -Y., 1981.
5. Крянев А. В., Чёрный А. И. Численные методы решения некорректно поставленных задач математической теории инвестиций. // Сборник тезисов докладов конференции "Обратные и некорректно поставленные задачи." М., 1995, с. 30.
6. Джонсон, Н., Лион Ф. Статистика и планирование экперимента в технике и науке. Методы обработки данных. М.: Мир, 1980.
7. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
8. Крянев А. В. Применение современных методов математической статистики при восстановлении регрессионных зависимостей на ЭВМ. М.: из-во МИФИ, 1988.

Александр Витальевич Крянев
Александр Иванович Чёрный

Математические модели взаимодействия эффективностей инвестиций.

Рукопись поступила в издательский отдел 29.02.96г.
Редактор Н. В. Шумакова.
Ответственный за выпуск А. В. Крянев

Лицензия ЛР № 020676 от 09.12.92г.

Подписано в печать 20.03.96. Формат 60×84/16
Печ.л. 0.75 Уч.-изд. л. 0.75 Тираж 100 экз. Изд. № 009-96 Заказ 286

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское шоссе, 31