МИФИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В.Крянев А.И.Черный

005-97

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИЙ

Москва 1997

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В.Крянев А.И.Черный

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИЙ

Препринт 005-97

Рекомендован к изданию
редсоветом института

Москва 1997

УДК 330.45
К85

Крянев А.В., Черный А.И. **Математические модели задач оптимизации портфелей инвестиций.** М.: Препринт/ МИФИ, 005-97, 1997.– 16 с.

Представлены схемы постановок и решения задач оптимизации портфеля инвестиций, отличные от схемы Марковица, и с новым определением риска. В частности, рассматривается новая постановка задачи на оптимизацию "большого" портфеля, актуальная для крупных инвесторов.

ISBN 5–7262–0101–9

Введение

В наших предыдущих работах [1–3] были рассмотрены задачи оптимизации портфелей инвестиций в постановках, модифицирующих классическую схему оптимизации Марковица [4, 5], включая случаи неустойчивости задач оптимизации. Однако часто, и в особенности это касается российских рынков инвестиций, необходимо рассматривать постановки задач оптимизации портфелей инвестиций, принципиально отличающиеся от схемы Марковица. Прежде всего принципиальное отличие новых постановок от схемы Марковица касается необходимости рассмотрения нового определения риска инвестиций, связанного с формированием портфеля инвестиций. Во-вторых, иногда целевой минимизируемый функционал в задаче оптимизации портфеля инвестиций по своему смыслу не является риском инвестиций, а имеет принципиально другое значение. Например, в предлагаемой ниже схеме оптимизации "большого" портфеля целевой функционал – "расстояние" между старым и новым составами портфеля, причем введение такого минимизируемого целевого функционала связано с требованием минимального уровня воздействия на рынок инвестиций в процессе реструктуризации "большого" портфеля.

Обобщения определений и расчетов эффективностей и рисков в задаче Марковица

Ранее уже отмечалось, что определение расчетных значений эффективностей и рисков в схеме оптимизации Марковица соответственно как математического ожидания и среднеквадратичного отклонения от математического ожидания эффективности, трактуемой как случайная величина, часто не соответствует реальной ситуации на рынке инвестиций.

Действительно, пусть, например, эффективность рассматриваемого объекта инвестирования имеет устойчивую тенденцию роста во времени. В этом случае, принимая решение об инвестировании в рассматриваемый объект, мы должны в качестве прогнозируемой величины эффективности брать не ее среднее значение по уже реализованным значениям, а ту величину, которая определяется тенденцией роста на будущий промежуток времени, назначаемый инвестором как срок формирования портфеля (до следующей даты реструктуризации портфеля инвестиций). При таком выборе расчетного значения эффективности в качестве риска следует брать меру отклонения от прогнозируемого значения.

В соответствии с вышесказанным примем следующее определение расчетного значения эффективности и риска.

В качестве базовой величины, в отличие от схемы Марковица будем брать не саму эффективность, трактуемую как случайная величина, а прогнозируемое значение эффективности на будущую дату, причем длина промежутка от этой будущей даты до текущей даты равна длине промежутка Δt, для которого определена эффективность. В качестве риска вложения капитала в инвестируемый объект будем брать меру отклонения от прогнозируемого значения эффективности.

Определение базовой величины, расчетных значений эффективности и риска схемы Марковица является частным случаем предлагаемой нами схемы.

Действительно, в схеме Марковица базовой прогнозируемой величиной является сама эффективность, а в качестве расчетного значения базовой величины и риска берутся соответственно оценка математического ожидания и оценка среднеквадратичного отклонения эффективности. Следовательно, согласно схеме Марковица для всех инвесторов расчетные значения эффективностей и рисков одинаковы (с точностью до погрешностей оценок математического ожидания и среднеквадратичного отклонения эффективности, трактуемой как случайная величина), эти величины являются как бы внутренними характеристиками самого объекта инвестирования. По существу в схеме Марковица – Шарпа – Тобина заложена схема равной информативности всех участников инвестиционного рынка.

На наш взгляд, такая точка зрения, как правило, неадекватно описывает реальную ситуацию на любом инвестиционном рынке. С некоторой степенью натяжки еще можно согласиться с тем мнением, что большинство участников рынка одинаково информировано и не обладает дополнительной информацией о будущем состоянии рынка, кроме той информации, которая имеется в уже реализованных значениях характеристик рынка (на основе которых, в частности, подсчитываются эффективности). Но

совершенно неправильной является гипотеза о том, что в качестве расчетных значений эффективностей и рисков большинство инвесторов (а тем более все, как это считается в модели равновесия рынка САРМ) будут брать оценки математических ожиданий и среднеквадратичных отклонений эффективностей, подсчитываемых по уже реализованным значениям. И уже совсем неправомочной являлась бы рекомендация применения во всех случаях в качестве расчетных значений эффективностей и рисков оценок математических ожиданий и среднеквадратичных отклонений эффективностей.

Данное выше определение расчетных значений эффективностей и рисков позволяет при реализации схемы оптимизации Марковица добиться лучшего результата по инвестированию в условиях лучшего прогноза ожидаемых значений эффективностей. Прогноз расчетных значений эффективностей и рисков становится индивидуальным для каждого инвестора и позволяет брать в качестве расчетных значений эффективностей и рисков в задаче оптимизации портфеля инвестиций те значения, которые согласно индивидуальному прогнозу инвестора, полученному, возможно, с привлечением дополнительной априорной информации, являются наиболее приемлемыми. Таким образом, в предлагаемой нами схеме оценки расчетных значений эффективностей и рисков реализуется правило – тот, кто лучше прогнозирует, имеет лучший результат.

Следовательно, согласно вышесказанному, каждый инвестор (решающий задачу оптимизации) для каждого рассматриваемого им объекта инвестирования должен оперировать со случайной величиной – прогнозным значением эффективности R_{pre} на будущую дату, отстоящей от текущей даты на временном расстоянии, равном промежутку, для которого определена эффективность.

Возьмем теперь для конкретизации один из возможных вариантов расчетных значений эффективностей и риска.

Определим расчетные значения эффективности и риска рассматриваемого объекта инвестирования для данного инвестора как математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины R_{pre}.

При составлении портфеля инвестиций, состоящего из n объектов инвестирования, пронумерованных индексом $i = \overline{1,n}$, необходимо оценить ковариационную матрицу системы случайных величин

$$\vec{R}_{pre} = (R_{1pre}, \dots, R_{npre})^{T},$$

где R_{ipre} – прогнозируемая эффективность i-го объекта инвестирования для рассматриваемого инвестора.

Предположим, что для получения прогнозируемых значений эффективностей инвестор использует имеющийся у него алгоритм (схему) прогноза, который может быть применен и к уже реализованным датам в прошлом (возможно не ко всем), т.е. для набора прошлых дат $t = t_1, \dots, t_N$ алгоритм прогноза позволяет прогнозировать для будущего промежутка длиной Δt значения эффективностей $R_{ipre}(t_k)$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,N}$. Пусть $R_i(t_k)$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,N}$ – реализованные значения эффективностей.

Тогда, в предположении стационарности ковариационной матрицы W, для вектора прогнозных эффективностей $\vec{R}_{pre}$ получаем оценку ее элементов W_{ij}:

$$W_{ij} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} (R_{ipre}(t_k) - R_i(t_k)) \cdot (R_{jpre}(t_k) - R_j(t_k)),$$

$$i,j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Приведем еще одну, на наш взгляд, конструктивную модель задания распределений случайных величин R_{ipre}, $i = \overline{1,n}$.

Пусть прогнозируемые значения эффективностей R_i на текущую дату принадлежат конечным промежуткам

$$R_{i\min} \le R_{ipre} \le R_{i\max}, \quad i = \overline{1,n} \tag{2}$$

и случайные величины R_{ipre}, $i = \overline{1,n}$ попарно не коррелируют.

Тогда, если постулируется равномерный закон распределения для каждой R_{ipre}, имеем равенство:

$$W = \mathrm{diag}(\sigma^2(R_{1pre}), \dots, \sigma^2(R_{npre})),$$

где $\sigma^2(R_{ipre}) = \dfrac{(R_{i\max} - R_{i\min})^2}{12}$, $i = \overline{1,n}$.

Итак, согласно данному выше определению расчетных значений эффективностей и рисков для задачи оптимизации портфеля инвестиций, в качестве расчетных значений эффективностей берется оценка вектора математических ожиданий $M\vec{R}_{pre} = (MR_{1pre}, \dots, MR_{npre})^{T}$, а в качестве матрицы W – оценка ковариационной матрицы случайного вектора $\vec{R}_{pre}$.

Пусть известен закон распределения вектора $\vec{R}_{pre}$ прогнозируемых значений эффективностей. Обозначим через $p_{pre}(R_1, \dots, R_n)$ совместную плотность вероятностей компонент вектора $\vec{R}_{pre}$.

В частности, когда $R_{1pre}, \dots, R_{npre}$ – независимая система случайных величин, $p_{pre}(R_1, \dots, R_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{pre}(R_i)$, где $p_{pre}(R_i)$ – плотность вероятностей случайной величины R_{ipre}.

Обозначим через p_i вероятность события $A_i = (R_{ipre} \ge R_{i'})$ для всех $i' = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Очевидно, события $A_i, i = \overline{1,n}$ несовместны и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Поскольку аналитический расчет вероятностей p_i сложен, при решении практических задач оценку p_i можно осуществить с помощью монте – карловского статистического эксперимента [6].

На k-м шаге схемы статистического эксперимента Монте – Карло проводится разыгрывание векторной случайной величины $\vec{R}_{pre}$. Среди всех реализованных значений R_{ik}, $i = \overline{1,n}$ компонент вектора $\vec{R}_{prek}$ выбирается наибольшая и фиксируется ее номер. Затем осуществляется следующий шаг статистического эксперимента, на котором разыгрывается новое независимое значение вектора $\vec{R}_{pre}$. Пусть осуществлено N шагов схемы Монте – Карло.

Тогда в качестве оценок вероятностей $\hat{p}_i = \hat{p}(A_i)$, $i = \overline{1,n}$ берем величины

$$p_i = \frac{m_i}{N}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где m_i – число случаев, когда реализованное значение R_{ik} превосходило реализованные значения остальных компонент $R_{i'k}$, $i' = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Поскольку $\sum_{i=1}^{n} m_i = N$, оценки $\hat{p}_i$ удовлетворяют условию нормировки и $\sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i = 1$.

Предположим, что $p_{i_0} = 0$. Последнее означает, что при любом исходе реализованная эффективность i_0-го объекта инвестирования никогда (точнее – почти никогда) не будет превосходить реализованные значения эффективностей всех других объектов инвестирования.

Следовательно, с точки зрения оптимизации портфеля инвестиций совершенно бесполезно вкладывать капитал в i_0-й объект инвестирования, капитал следует распределять только среди тех объектов инвестирования, для которых $p_i > 0$, в этом случае получим заведомо лучший результат, т.е. i_0-й объект инвестирования должен быть исключен из списка объектов, из которых составляется оптимальный портфель.

Следовательно, при решении задачи оптимизации портфеля риск вложения капитала в i-й объект должен неограниченно возрастать при уменьшении p_i вплоть до нуля.

В соответствии с вышесказанным определим риск портфеля инвестиций, задаваемый вектором долей $\vec{x} = (\vec{x}, \dots, x_n)^{T}$ формулой:

$$\sigma_p^2 = (W_p \vec{x}, \vec{x}), \tag{4}$$

где W_p – ковариационная матрица случайного нормированного вектора эффективностей инвестиций $\vec{R}_p^{H} = (R_1^{H}, \dots, R_n^{H})^{T}$ с дисперсиями

$$\sigma^2\left(R_i^{H}\right) = \left(\sigma^2_{ipre} + \alpha \cdot \sigma^2_{max}\right)\left(\frac{1}{p_i} - 1\right), \quad i = \overline{1,n} \tag{5}$$

с корреляционной матрицей и вектором $M\vec{R}_p^{H}$ соответственно корреляционной матрице и вектору математического ожидания вектора прогнозируемых эффективностей $\vec{R}_{pre}$. В формуле (5) $\alpha > 0$, $\sigma_{max} = \max_i = -\left\{\sigma_{ipre}{}^2\right\}$.

Из формулы (5) следует:

1) $\sigma^2(R_i^{H}) \to 0$ при $p_i \to 1$, в частности, $\sigma^2(R_i^{H}) = 0$ в случае, если список состоит из одного объекта инвестирования, т.е. $n = 1$;

2) $\sigma^2(R_i^{H}) \to +\infty$ при $p_i \to 0$, в том числе и для "безрисковых" объектов инвестирования, например для государственных ценных бумаг с гарантированным доходом на период Δt, для которых $\sigma_{i_{pre}}{}^2 = 0$;

3) $\sigma^2(R_i^{H}) = 0$ тогда и только тогда, когда $p_i = 1$. Если $p_i < 1$, то $\sigma^2(R_i^{H}) > 0$, т.е. объект может быть безрисковым при портфельном инвестировании тогда и только тогда, когда он является абсолютно лидирующим, т.е. для него $p_i = 1$.

Согласно определению, ковариационная матрица вектора портфельных эффективностей $\vec{R}_p^{H}$ W_p дается равенством:

$$W_p = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\left(\sigma_{1pre}{}^2 + \alpha \cdot \sigma^2_{max}\right)\left(\frac{1}{p_1} - 1\right)}, \dots, \sqrt{\left(\sigma^2_{npre} + \alpha \cdot \sigma^2_{max}\right)\left(\frac{1}{p_n} - 1\right)}\right) \times$$

$$\times\, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_{1pre}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{npre}}\right) \cdot W_{pre} \cdot \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_{1pre}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{npre}}\right) \times$$

$$\times \operatorname{diag}\left(\sqrt{\left(\sigma^2_{\text{pre}} + \alpha \cdot \sigma^2_{\max}\right)\left(\frac{1}{p_1} - 1\right)}, \dots, \sqrt{\left(\sigma^2_{n\text{pre}} + \alpha \cdot \sigma^2_{\max}\right)\left(\frac{1}{p_n} - 1\right)}\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(\sqrt{\left(1 + \alpha \frac{\sigma^2_{\max}}{\sigma^2_{1\text{pre}}}\right)\left(\frac{1}{p_1} - 1\right)}, \dots, \sqrt{\left(1 + \alpha \frac{\sigma^2_{\max}}{\sigma^2_{n\text{pre}}}\right)\left(\frac{1}{p_n} - 1\right)}\right) \times$$

$$\times W_{\text{pre}} \cdot \operatorname{diag}\left(\sqrt{\left(1 + \alpha \frac{\sigma^2_{\max}}{\sigma^2_{1\text{pre}}}\right)\left(\frac{1}{p_1} - 1\right)}, \dots, \sqrt{\left(1 + \alpha \frac{\sigma^2_{\max}}{\sigma^2_{n\text{pre}}}\right)\left(\frac{1}{p_n} - 1\right)}\right).$$

В частности, если корреляционная матрица вектора $\vec{R}_{\text{pre}}$ единичная, то

$$W_{\text{p}} = \operatorname{diag}\left(\left(\sigma^2_{1\text{pre}} + \alpha\, \sigma^2_{\max}\right)\left(\frac{1}{p_1} - 1\right), \dots, \left(\sigma^2_{n\text{pre}} + \alpha\, \sigma^2_{\max}\right)\left(\frac{1}{p_n} - 1\right)\right).$$

Поскольку при $p_i = 0$ дисперсия прогнозируемой портфельной эффективности равна бесконечности, такой объект инвестирования автоматически исключается из списочного состава портфеля и оптимизация портфеля будет производиться только относительно объектов, для которых $p_i > 0$.

Отметим, что если $p_{i_0} = 1$, то риск вложения капитала в этот объект инвестирования будет равен нулю, даже если его собственный риск $\sigma^2_{i_0\text{pre}}$ отличен от нуля.

Замечание. Если $p_{i_0} = 0$, то считаем риск вложения капитала в такой объект инвестирования бесконечно большим и исключаем этот объект из списочного состава портфеля.

Оптимизация "большого" портфеля инвестиций

В схеме Марковица имеются две характеристики портфеля, одну из которых – риск необходимо минимизировать, а другую – эффективность – максимизировать.

Компромисс решается путем минимизации риска портфеля r_{p} при различных фиксированных значениях эффективности портфеля R_{p} и дальнейшим выбором точки на получаемой кривой зависимости $r_{\text{p}} = r_{\text{p}}(R_{\text{p}})$.

Однако при рассмотрении "большого" портфеля появляется еще одна важная характеристика – мера отклонения нового (оптимального) состава портфеля от старого (существующего) состава. В силу большой величины капитала, уже помещенного в старый состав, реструктуризацию портфеля нужно производить таким образом, чтобы добиваться фиксированной эффективности портфеля при наименьших отклонениях нового состава портфеля от старого.

Предполагается, что для большого портфеля также должны выполняться априорные линейные ограничения вида

$$\vec{b} \le A\vec{x}, \tag{6}$$

где A – $(m \times n)$-матрица, причем в совокупность ограничений (6) входят естественные ограничения $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ и равенство $\sum_{i=1}^{n} R_i \cdot x_i = m_{\text{p}}$, где $m_{\text{p}} \in]m_{\text{p}\min}, m_{\text{p}\max}[$ – фиксированное значение эффективности портфеля.

Мера отклонения нового состава портфеля $\vec{x}$ от старого $\vec{x}_0$ имеет вид

$$J_{\text{dis}}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot (x_i \cdot S_{\text{p}} - x_{i0} \cdot S_0)^2, \tag{7}$$

где d_i, S_{p}, S_0 – положительные числа.

Пусть, например, инвестиции производятся на рынке ценных бумаг. Тогда $d_i = \dfrac{1}{p_i^2}$, p_i – стоимость ценной бумаги i-го объекта инвестирования, S_{p} – стоимость ценных бумаг нового портфеля, S_0 – стоимость ценных бумаг старого портфеля (в общем случае $S_0 \ne S_{\text{p}}$, поскольку на текущую дату, когда производится оптимизация портфеля, из портфеля (или в портфель) может выводиться (вводиться) определенный капитал).

Функционал $J_{dis}(\vec{x},\vec{x}_0)$ можно записать в виде

$$J_{dis}(\vec{x},\vec{x}_0) = \frac{1}{2}(D\vec{x},\vec{x}) - (\vec{b},\vec{x}) + b_0, \tag{8}$$

где

$$D = 2\cdot \mathrm{diag}\left(\frac{S_p^2}{p_1^2},\dots,\frac{S_p^2}{p_n^2}\right), \quad \vec{b} = 2S_pS_0\left(\frac{1}{p_1^2},\dots,\frac{1}{p_n^2}\right),$$

$$b_0 = S_p^{02}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i0}^2}{p_i^2}.$$

Поставим задачу оптимизации "большого" портфеля

$$\min J_{dis}(\vec{x},\vec{x}_0), \quad \vec{x}\in G(m_p), \tag{9}$$

где множество $G(m_p)$ определено системой неравенств (6).

Задача (9) – задача квадратичного программирования, для решения которой используем метод, предложенный в [1].

Функционал Лагранжа для задачи (9) имеет вид

$$L(\vec{x},\vec{u}) = \frac{1}{2}(D\vec{x},\vec{x}) - (\vec{b},\vec{x}) + (\vec{u},\vec{a} - A\vec{x}).$$

Следовательно,

$$\vec{x} = D^{-1}(\vec{b} + A^{\mathrm{T}}\vec{u}), \tag{10}$$

где $\vec{u}$ согласно теореме Куна – Таккера является решением двойственной задачи

$$\min_{\vec{u},\,\vec{v}\ge\vec{0}}\left\{\frac{1}{2}(C\vec{u},\vec{u}) - (\vec{u},\vec{a}')\right\}, \tag{11}$$

$C = AD^{-1}\cdot A^{\mathrm{T}}$, $\vec{a}' = \vec{a} - AD^{-1}\vec{b}$, а минимум берется по всем векторам $\vec{u}$ размерности $n+2m+2$, первые $n+2m$ компонент которых $\vec{v} = (u_1,\dots,u_{n+2m})^{\mathrm{T}}$ неотрицательны.

Для численного решения двойственной задачи (11) используем итерационный процесс, описанный в [1, 3].

После останова итераций на L-м шаге искомый вектор долей распределения капитала $\vec{x}$ определяется согласно (10) равенством

$$\vec{x} = D^{-1}(\vec{b} + A^{\mathrm{T}}\vec{u}^{(L)}). \tag{12}$$

Так же, как и глобальная обобщенная задача Марковица, глобальная задача оптимизации большого портфеля определяется совокупностью решений локальных задач (9) для различных фиксированных значений $m_p \in]m_{min}, m_{max}[$, где m_{min} и m_{max} находятся при решении экстремальных задач линейного программирования [3].

Следовательно, в результате решения глобальной задачи оптимизации большого портфеля получаем зависимость минимального значения расстояния между новым и старым составами портфеля $J_{dis} = J_{dis}(\vec{x},\vec{x}_0)$ от значения эффективности портфеля m_p при изменении последнего на всем возможном интервале его значений.

Литература

1. *Крянев А.В., Черный А.И.* Численные решения оптимизационных задач математической теории инвестиций. М.: Препринт/ МИФИ, 022-95, 1995.

2. *Крянев А.В., Черный А.И.* Математические модели взаимодействия эффективностей инвестиций. М.: Препринт / МИФИ, 009-96, 1996.

3. *Крянев А.В., Черный А.И.* Численные решения оптимизационных задач для математических моделей теории инвестиций// Математическое моделирование, 8 (8), 1996, с.97-103.

4. *Elton E.J., Gruber M.J.* Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. N.Y., John Wiley and Sons, 1987.

5. *Markowitz H.M.* Mean Variance Analysis in Portfolio Choise and Capital Markets. Basil, Blackwell, 1990.

6. *Соболь И.М.* Численные методы Монте – Карло. М.: Наука, 1973.

Александр Витальевич Крянев
Александр Иванович Черный

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

ПОРТФЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИЙ

Рукопись поступила в издательский отдел 27.01.97

Ответственный за выпуск А.В.Крянев

Редактор Н.Н.Антонова

ЛР № 020676 от 09.12.92.
Подписано в печать 03.02.97 Формат 60x84 1/16
Уч.-изд.л. 1,0 Печ.л. 1,0 Тираж 100 экз.
Изд. № 005-97 Заказ № 85

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет)

Типография МИФИ

115409, Москва, Каширское шоссе, 31