А.В.КРЯНЕВ

ОСНОВЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА И ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ В РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Москва 2002

ББК 65-93 я7
УДК 330.42(075)
К85

Крянев А.В. Основы финансового анализа и портфельного инвестирования в рыночной экономике.. - М.:МИФИ, 2001. -54с.

В учебном пособии дано краткое изложение основ математической теории портфельного инвестирования. Определены базовые элементы финансового анализа, продемонстрирован анализ инвестиционных потоков платежей. Описана схема Марковица формирования портфелей инвестиций и предложена модификация схемы Марковица с учетом российских условий. Приведены задания для самостоятельной работы.

Данное учебное пособие предназначено студентам экономико-аналитического института и специалистам, обучающимся на курсах повышения квалификации и переподготовки кадров, в том числе по программе переподготовки управленческих кадров для народного хозяйства России.

Пособие подготовлено на кафедре прикладной математики в физике и экономике. Издается в авторской редакции.

Рекомендовано редакционным советом МИФИ
в качестве учебного пособия

ISBN 5-7262-0318-6

Содержание

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ. БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ 4

ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА 4

ГЛАВА 2. ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ 11

ГЛАВА 3. СХЕМА МАРКОВИЦА ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИЙ...17

ГЛАВА 4. МОДИФИКАЦИИ СХЕМЫ МАРКОВИЦА С УЧЕТОМ РОССИЙСКИХ УСЛОВИЙ 30

Задание №1. Расчет коэффициентов роста и дисконтирования капитала. 46

Задание №2. Характеристики потока платежей инвестиционных проектов. 48

Задание №3. Оптимизация портфеля инвестиций. 51

Глава 1. Введение. Базовые элементы финансового анализа

В последние годы в нашей стране в связи с развитием рыночной экономики существенно повысился интерес к постановкам и решению задач теории инвестиций. Среди этих задач значительное место занимают задачи оптимизации портфелей инвестиций[*/]. Действительно, выбирая различные варианты распределения капитала между объектами, в которые инвестируется капитал, мы будем иметь различные результаты, если под результатом понимать величину дохода, полученного в течение заранее определенного периода. Очевидно, оптимальное распределение инвестируемого капитала должно обеспечивать в некотором смысле наилучший результат. В то же время, решение о структуре распределения капитала принимается часто в условиях неопределенности, когда доходность от вложения капитала в объекты инвестирования носит случайный характер. Тем самым появляется риск вложения капитала и задача оптимизации портфеля инвестиций должна ставиться и решаться в условиях наличия риска.

Следует подчеркнуть, что неустойчивость нарождающихся в Российской Федерации рынков инвестиций и, в частности, рынков ценных бумаг, порождена, прежде всего, более значительным, чем на Западе влиянием случайных факторов, носящих политический и экономический характер, а, следовательно, и большим уровнем риска вложения капитала в различные сегменты инвестиционного рынка.

Последнее обстоятельство порождает необходимость учета особенностей российских рынков инвестиций, в том числе на

[*/] Под портфелем инвестиций понимается распределение инвестируемого капитала между объектами, в которые этот капитал инвестируется. Распределение инвестируемого капитала определяется вектором $(K_1 \ldots K_n)^T$, где K_i - капитал, инвестируемый в i-й объект(см. также ниже).

уровне постановок задач оптимизации портфелей инвестиций и разработки устойчивых численных методов их решения.

Основы современной теории портфельного инвестирования (portfolio investment theory) были заложены в пятидесятые годы в работах американского математика-экономиста Г.Марковица. Основной заслугой Марковица в теории инвестирования является привнесение им в эту теорию стохастического подхода, согласно которому доходность инвестируемого капитала трактуется как случайная величина, характеристики которой и определяют ожидаемое значение доходности и риска реализации ожидаемого значения. Следовательно, впервые в теории инвестирования, начиная с работ Г.Марковица, риск инвестирования получил точное математическое числовое выражение, что и позволило сконструировать математические модели задач оптимизации портфелей инвестиций.

В постановке Г.Марковица доходность вложения капитала в рассматриваемый объект инвестирования является случайной величиной, математическое ожидание которой берется в качестве ожидаемого значения доходности от вложения капитала в рассматриваемый объект. В качестве риска Г.Марковиц предложил брать меру уклонения от ожидаемого значения - среднеквадратичное отклонение доходности как случайной величины. Такой выбор математического выражения для риска позволил реализовать в схеме портфельного инвестирования известный в экономике принцип, выраженный во фразе «не клади яйца в одну корзину», т.е. диверсификация капитала между несколькими объектами инвестирования приводит к уменьшению риска по сравнению с риском вложения капитала в отдельные объекты.

Математическая модель Г.Марковица задачи оптимизации портфеля инвестиций принадлежит к классу задач квадратичного программирования, теория численного решения которых развивалась в 50-60 годы в известной компании Rand Corporation, где в те годы проводил свои исследования

Марковиц вместе с одним из создателей линейного и нелинейного программирования Данцингом.

В настоящее время теория портфельного инвестирования широко используется в странах с развитой рыночной экономикой и является одним из основных инструментов, с помощью которого повышается эффективность использования материальных и финансовых ресурсов.

Следует отметить, что за прошедшие годы, исследователям, внесшим основной вклад в развитие теории портфельного инвестирования, были присуждены Нобелевские премии по экономике, в 1981 году Тобину, а в 1990 году Марковицу, Шарпу и Миллеру.

Прежде чем переходить к постановкам и решению задач портфельного инвестирования в условиях наличия неопределенности и тем самым наличия риска, рассмотрим основные элементы и схемы финансовой математики, необходимые для расчета доходностей и других финансовых характеристик инвестируемых капиталов [1-4].

Самая простая финансовая операция - однократное инвестирование (кредит, ссуда) суммы $S(t_0)$ на дату t_0 при условии, что на дату t_0+T должна быть возвращена сумма $S(t_0+T)$. Таким образом, t_0 - дата выдачи ссуды, t_0+T - дата погашения ссуды (date of maturity), T - срок или период ссуды, $S(t_0+T)$- полная стоимость кредита или наращенная сумма (accumulated value).

Для определения эффективности сделки используют следующие величины:

$$r(t_0,T)=\frac{S(t_0+T)-S(t_0)}{S(t_0)} \qquad (1.1)$$

- относительный интерес или ставка (interest rate, return);

$$d(t_0,T)=\frac{S(t_0+T)-S(t_0)}{S(t_0+T)} \qquad (1.2)$$

- относительная скидка или дисконт (discount rate).

Часто вместо дисконта $d(t_0,T)$ используют дисконт-фактор (discount factor), определенный равенством

$$v(t_0,T)=1-d(t_0,T) \qquad (1.3)$$

Для $r(t_0,T)$, $d(t_0,T)$ и $v(t_0,T)$ справедливы следующие равенства:

$$S(t_0+T)=S(t_0)\cdot(1+r(t_0,T)),$$

$$S(t_0)=S(t_0+T)\cdot(1-d(t_0,T)),$$

$$r(t_0,T)=\frac{d(t_0,T)}{1-d(t_0,T)}\ ,\ d(t_0,T)=\frac{r(t_0,T)}{1+r(t_0,T)}\ ,$$

$$v(t_0,T)=\frac{S(t_0)}{S(t_0+T)}=\frac{1}{1+r(t_0,T)}\ .$$

Как правило, $r(t_0,T)$ и $d(t_0,T)$ выражают в процентах, умножая эти величины на 100.

С точки зрения сравнения эффективностей вложения капитала с разными сроками вложения удобно эти характеристики пересчитывать для единого базового периода. Обычно в качестве базового периода берут год. Как правило, ставку и дисконт указывают для базового периода, а перерасчет характеристик кредитной операции для фактического периода обычно осуществляют либо по схеме простых процентов (simple interest), либо по схеме сложных процентов (compound interest).

Пусть задана ставка r для базового периода. Тогда наращенная сумма $S(t_0,T)$ для рассматриваемого периода T, выраженного в долях базового периода, рассчитывается по схеме простых процентов согласно формуле

$$S(t_0+T)=S(t_0)\cdot(1+r\cdot T)\,. \qquad (1.4)$$

Множитель $A(T)=(1+r\cdot T)$ называют коэффициентом наращения простых процентов.

Пример1.1. *Пусть годовая ставка равна 20%. Период T = 3 месяца. Тогда* $A(T)=(1+\frac{3}{12}\cdot 0.2)=1.05$.

В течение большого периода кредита T ставка r может изменяться (например, в условиях переменной инфляции ставка r должна «отслеживать» эти изменения).

Наращенная сумма $S(t_0,T)$ в условиях переменной ставки $r(t) = r_i$,

$t\in[t_i,t_{i+1}]$, i = 0,n,1 , $t_n=t_0+T$ по схеме простых процентов рассчитывается согласно формуле

$$S(t_0+T)=S(t_0)\cdot A(T,n)\ , \qquad (1.5)$$

где коэффициент наращения $A(T,n)=1+\sum_{i=0}^{n-1} r_i\cdot(t_{i+1}-t_i)$, а длина промежутков $t_{i+1}-t_i$ измеряется в долях по отношению к базовому периоду.

Пример1.2 *Пусть кредит предоставлен на период T = 6 месяцев. Причем в течение первого месяца годовая ставка равна 40%, а затем каждый последующий месяц ставка уменьшается на 2%. Тогда коэффициент наращения простых процентов равен A(0.5,6)=1+(0.4+0.38+ 0.36+0.34+0.32+0.3)/12=1.175, т.е. увеличение инвестируемой в настоящий момент суммы S за полгода будет составлять 17,5%.*

Для расчета дисконт-фактора по схеме простых процентов используют равенство

$$v(t_0,T)=v_M=\frac{1}{1+r(t_0,T)}=\frac{1}{1+r\cdot T}\ , \qquad (1.6)$$

где r - ставка для базового периода. В этом случае говорят о математическом дисконт-факторе.

Поскольку обычно $r\cdot T\ll 1$, то, используя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, имеем

$$\frac{1}{1+r\cdot T}=1-r\cdot T+(r\cdot T)^2-\ldots\approx 1-r\cdot T\,.$$

Дисконт-фактор, подсчитанный по формуле

$$v_B=1-r\cdot T\,, \qquad (1.7)$$

называют банковским дисконт-фактором.

Банковский дисконт-фактор при выполнении неравенства $r \cdot T < 1$ всегда меньше математического дисконт-фактора.

Пример1.3*. Пусть годовая ставка r = 20%, T = 6 месяцев. Тогда математический дисконт фактор* $v_M = 1/(1+0.2\cdot 0.5) = 0.9091$, *а банковский* $v_B = 1 - 0.2\cdot 0.5 = 0.9$.

При долгосрочных финансово-кредитных операциях накопленные проценты через определенный промежуток реинвестируются, т.е. проводится присоединение начисленных процентов к их базовой сумме или, как принято говорить, происходит капитализация процентов.

Расчет коэффициента наращения A(T) по схеме сложных процентов в условиях начисления процентов по прошествию базового периода производится по формуле

$$A(T) = (1+r)^T, \quad (1.8)$$

где r - номинальная ставка базового периода.

Если начисления процентов производится m раз в течение базового периода, то коэффициент наращения равен

$$A(T,m) = (1+\frac{r}{m})^{T\cdot m}. \quad (1.9)$$

В частности в условиях непрерывного начисления процентов, когда $m \to \infty$

$$A(T) = \lim_{m\to\infty} A(T,m) = e^{r\cdot T}. \quad (1.10)$$

Эффективная ставка r_{ef} определяется из равенства

$$1+r_{ef} = (1+\frac{r}{m})^m .$$

(1.11)

Следовательно, для любой схемы начисления сложных процентов коэффициент наращения A(T) будет определяться единым равенством

$$A(T) = (1+r_{ef})^T .$$

Из последнего равенства имеем $1+r_{ef} = (\frac{S(t_0+T)}{S(t_0)})^{\frac{1}{T}}$, т.е. $1+r_{ef}$ - средний рост инвестируемого капитала, приходящийся на единицу базового периода. Пусть, например, в качестве базового периода взят 1 календарный день. Тогда $1+r_{ef}$ будет определять средний рост стоимости инвестируемого капитала за один день инвестиционного периода.

Очевидно, эффективная ставка r_{ef} и ставка r в условиях непрерывного начисления процентов связаны соотношением $1+r_{ef} = e^r$. Следовательно, величина $\frac{1}{1+r_{ef}} = e^{-r}$ будет определять коэффициент дисконтирования базового периода, а $e^{-r\cdot T}$ коэффициент дисконтирования для периода длительности T.

Если ставка r является переменной во времени r = r(t), то коэффициент наращения $A(t_0,T)$ и коэффициент дисконтирования $v(t_0,T)$ в условиях непрерывного начисления процента будут определяться равенствами

$$A(t_0,T) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t_0+T} r(t)dt\right\}, v(t_0,T) = \exp\left\{-\int_{t_0}^{t_0+T} r(t)dt\right\} \quad (1.12).$$

Глава 2. Финансовый анализ инвестиционных потоков платежей

На практике чаще всего приходится оценивать эффективность не отдельного разового инвестирования капитала и его разового возврата, а рассмотрения последовательности вложений и возврата сумм различной величины и в различные моменты времени. В этом случае принято говорить о потоке платежей, а основная задача состоит в оценке эффективности вложения капитала, определяемого потока платежей в прямом (инвестирование капитала) и в обратном (возврат капитала) направлениях.

В дальнейшем при рассмотрении потока платежей удобно считать дату первого платежа за начало отсчета времени.

Пусть в моменты времени t_k , k=0,1,...n реализуются суммы S_k потока платежей, причем S_k берется со знаком плюс, если S_k - возвратная сумма (доход) и S_k берется со знаком минус, если S_k - инвестируемая сумма (расход). Обозначим $\vec{S}=\left(S_0,S_1,\ldots,S_n\right)^T$, $\vec{t}=\left(0,t_1,\ldots,t_n\right)^T$. Величина

$$NPV(\vec{S},\vec{t})=\sum_{k=0}^{n}S_k\cdot v_k\ , \qquad (2.1)$$

где v_k - коэффициент дисконтирования для интервала $\left[0,t_k\right]$, $v_0=1$,

называется чистой приведенной стоимостью или NPV потока платежей $(\vec{S},\vec{t})$ (Net Present Value).

В условиях непрерывного начисления процентов и переменной банковской ставки $v_k=\exp\left\{-\int\limits_0^{t_k}r(t)dt\right\}$, а в

условиях постоянства ставки и начисления простого процента $v_k=\dfrac{1}{1+r\cdot t_k}$.

Для того чтобы инвестирование капитала, определяемого потоком платежей $(\vec{S},\vec{t})$, имело для инвестора экономико-финансовый смысл необходимо, чтобы $NPV(\vec{S},\vec{t})$ было положительным.

Пример2.1. *Пусть сумма в 100 млн.руб. инвестируется в реализацию некоторого проекта. Поступления инвестору от реализации проекта планируются в объеме 50 млн.руб. в конце 1-го года, 50 млн.руб. в конце 2-го года, 50 млн.руб. в конце 3-го года. Годовая банковская номинальная ставка r = 20%. Начисления производятся по схеме сложных процентов при однократном начислении процентов в конце каждого года. Тогда*

$$\mathrm{NPV}=-100+\frac{50}{1+0.2}+\frac{50}{(1+0.2)^2}+\frac{50}{(1+0.2)^3}=$$
$$=-100+41.67+34.72+28.94=5.33>0.$$

Поскольку $NPV>0$, *то условия инвестирования являются предварительно приемлемыми для инвестора (с точки зрения* NPV *).*

Положительность NPV является необходимым условием для участия инвестора в инвестировании средств в рассматриваемый объект. Для сравнения различных объектов инвестирования с различными инвестируемыми суммами и потоками платежей с точки зрения эффективности вложения средств используют такую характеристику инвестиционного вложения капитала, как внутреннюю ставку r_{ef} (Internal Rate of Return) потока платежей, определяемого рассматриваемым объектом инвестирования.

Внутренняя ставка r_{ef} потока платежей $(\vec{S},\vec{t})$ определяется как корень уравнения

$$NPV(\vec{S},\vec{t}) = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot v_k(r_{ef}) = 0 \quad , \qquad (2.2)$$

где $v_k(r_{ef})$ - коэффициенты дисконтирования рассчитываются при выбранной схеме начисления процентов для искомой ставки r_{ef}.

Например, при одноразовом начислении сложных процентов уравнение (2.2) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n} S_k \,/\, (1+r_{ef})^{t_K} = 0 \ , \qquad (2.3)$$

а при непрерывном начислении процента

$$\sum_{k=0}^{n} S_k \cdot e^{-r_{ef} \cdot t_K} = 0 \, . \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.2) называется уравнением внутренней доходности. Смысл уравнения (2.2) ясен: необходимо найти такое значение ставки r_{ef}, при котором имеет место баланс поступающих и уходящих сумм с учетом их дисконтирования на начальную дату.

Определение внутренней ставки потока платежей полностью согласуется с определением эффективной ставки для простой операции кредитования. Действительно, для простой операции имеем $NPV = -S(0) + S(T) \cdot \dfrac{1}{(1+r_{ef})^T} = 0$.

Откуда $1 + r_{ef} = (\dfrac{S(T)}{S(0)})^{\frac{1}{T}}$.

Ясно, что имеет смысл только положительное решение r_{ef} уравнения (2.2).

Определим последовательность накопленных сумм равенством

$S^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} S_k$, m = 0,1,...,n. Для дискретного потока платежей справедлива следующая теорема.:

Теорема. *Если последовательность накопленных сумм* $S^{(0)},\ldots,S^{(n)}$ *имеет ровно одну перемену знака с минуса на плюс и* $\sum_k \left|S_k^-\right| < \sum_k S_k^+$, *то уравнение внутренней доходности (2.2) имеет единственное положительное решение* $r_{ef} > 0$.

Следствие. *Если все уходящие суммы* S_k^- *предшествуют всем приходящим суммам,* S_k^+, *и выполнено неравенство* $\sum_k \left|S_k^-\right| < \sum_k S_k^+$, *то уравнение (2.2) имеет единственное положительное решение* .

Фактическое нахождение корня уравнения (2.2) можно осуществить с помощью стандартной итерационной процедуры Ньютона

$$V^{(l+1)} = V^{(l)} - f(V^{(l)}) \,/\, f'(V^{(l)}) \ . \qquad (2.5)$$

Например, для решения уравнения (2.3) удобно обозначить $V = \dfrac{1}{(1+r_{ef})}$,

$f(V) = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot V^{t_K}$ и реализовать на компьютере схему (2.5). Для решения уравнения (2.4) удобно ввести обозначения $V = \exp(-r_{ef})\, , f(V) = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot V^{t_K}$.

Иногда суммы S(t) потока платежей поступают столь часто, что имеет смысл говорить не о дискретном, а о непрерывном потоке платежей. В случае непрерывного потока платежей вводится функция интенсивности (плотности) платежей $\rho(t)$, имеющая размерность [единица измерения инвестируемого капитала / единица измерения времени относительно базового периода]. Если $\rho(t) > 0$, то это означает для момента времени t баланс в пользу поступающих сумм, а если $\rho(t) < 0$, то баланс в пользу уходящих сумм.

Тогда NPV дискретно-непрерывного потока платежей подсчитывается согласно формуле

$$NPV(\vec{S},\vec{t}) = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot v_k(r_{ef}) + \int_0^T v(t)\cdot\rho(t)dt \ , \qquad (2.6)$$

где $v(t)$ - значение коэффициента дисконтирования для промежутка времени [0,t], $\sum_{k=0}^{n} S_k \cdot v_k$ составляет дискретную часть NPV потока платежей (обычно в эту часть входят большие отдельные суммы, приходящие в дискретные моменты времени), а $\int_0^T v(t)\cdot\rho(t)dt$ представляет собой вклад в NPV непрерывной части потока платежей (обычно сравнительно небольших по величине сумм, но поступающих в непрерывном режиме).

Пусть, например, проценты начисляются по схеме сложных процентов с одноразовым начислением процентов в конце базового периода. Тогда уравнение для внутренней ставки дискретно-непрерывного потока платежей имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{n} S_k \,/\, (1+r_{ef})^{t_K} \ + \int_0^T \frac{\rho(t)}{(1+r_{ef})^t}dt = 0. \qquad (2.7)$$

Обозначим $V = \dfrac{1}{(1+r_{ef})}$, $f_1(V) = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot V^{t_K}$,

$f_2(V) = \int_0^T V^t \cdot \rho(t)dt$ - интеграл, зависящий от параметра V.

Для нахождения искомого V, применяем метод итераций Ньютона

$$V^{(l+1)} = V^{(l)} - (f_1(V^{(l)}) + f_2(V^{(l)})) / (f_1'(V^{(l)}) + f_2'(V^{(l)})), \quad (2.8)$$

где $f_1'(V) = \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot S_k \cdot V^{t_K - 1}$, $f_2'(V) = \int_0^T t \cdot V^{t-1} \cdot \rho(t)dt$, причем для расчета $f_2(V)$, $f_2'(V)$ можно использовать формулы численного расчета определенных интегралов типа формулы Симпсона.

Итерационный процесс (2.8) легко реализуется на компьютере.

Пусть имеется возможность инвестировать капитал в несколько объектов, пронумерованных индексом i=1,...,N. Предположим, что все расчетные величины, определяющие NPV для каждого объекта инвестирования, являются детерминированными, т.е. инвестирование средств происходит в условиях отсутствия риска. В этом случае производится расчет внутренних ставок за установленный инвестором период T для каждого объекта инвестирования r_{efi}, i =1,...,N . После этого необходимо провести ранжирование объектов по величинам

$$r_{ef(1)} > r_{ef(2)} > ... > r_{ef(N)}.$$

Объекты с наибольшими значениями r_{ef} для которых дополнительно выполнены неравенства

$$r_{ef(1)} > r_{ef(2)} > ... > r_{ef(m)} > r_B,$$

где r_B - банковская безрисковая ставка, являются кандидатами на инвестирование капитала по критерию эффективности вложения средств, определяемой внутренней ставкой.

Глава 3. Схема Марковица формирования портфелей инвестиций

Рассмотрим теперь проблему распределения инвестируемого капитала в условиях наличия неопределенности [4-6].

Неопределенность означает, что критерий эффективности вложения капитала в выбранный объект инвестирования имеет случайный характер.

Пронумеруем объекты инвестирования индексом i=1,....,n. Обозначим через R_i эффективность вложения капитала в i-й объект инвестирования.

Замечание. *В качестве эффективности в зависимости от конкретной задачи могут выбираться различные характеристики, например: 1. $R_i=S_i(T)/S_i(0)$-коэффициент наращения капитала за фиксированный период T; 2. $R_i= (S_i(T)-S_i(0))/S_i(0)$-ставка за рассматриваемый период T; 3. $R_i=IRR$ i-го инвестиционного проекта, если формируется портфель (пакет) инвестиционных проектов; 4. $R_i=(S_{inp}(T)-S_{inок}(0)+d_i(T)/S_{inок}(0)$, $S_{inок}(0)$-цена покупки акции i-го эмиттента на начальную дату t=0, $S_{inp}(T)$- цена продажи акции i-го эмиттента на конечную дату t=T, $d_i(T)$-дивиденды i-го эмиттента, приходящиеся на период $t\in[0,T]$,-если формируется портфель акций на фондовом рынке.*

Математически предположение о наличии неопределенности означает, что R_i - случайные величины.

Полное знание о системе случайных величин $\vec{R}=(R_1,\dots,R_n)^T$ (случайном векторе $\vec{R}$) определяется ее законом распределения. Однако для решения задачи оптимального распределения капитала между рассматриваемыми объектами инвестирования согласно схеме Марковица достаточно знать лишь две характеристики

случайного вектора эффективностей- вектор математических ожиданий $E(\vec{R})=\vec{m}=(m_1,\dots,m_n)^T$, $m_i=E(R_i)$- ожидаемое среднее значение эффективности i-го объекта инвестирования и ковариационную матрицу W , $W_{ij}=\mathrm{cov}(R_i,R_j)$, i,j = 1,...,n.

Оценки вектора $\vec{m}$ и матрицы W могут быть получены в зависимости от конкретного экономико-финансового содержания объектов инвестирования.

Пусть, например, критерий эффективности R_i есть внутренняя ставка r_{efi} потока инвестиционных платежей, определяемого объектом инвестирования. Тогда, зная распределения случайных значений параметров $(\vec{S},\vec{t})$ [*/], определяющих NPV и внутреннюю ставку, можно с помощью метода статистического эксперимента Монте-Карло построить выборку случайных реализаций каждой эффективности R_i как случайной величины

$$R_{i1},\dots,R_{iN}\ ,\ i = 1,\dots,n\ . \qquad (3.1)$$

Оценки $\hat{m}_i$ и $\hat{W}_{ij}$ ожидаемых средних значений эффективностей m_i и элементов W_{ij} ковариационной матрицы W могут быть получены на основе выборки (3.1) с помощью равенств

$$\hat{m}_i=\frac{1}{N}\cdot\sum_{l=1}^{N}R_{il}\ ,\hat{W}_{ij}=\frac{1}{N-1}\cdot\sum_{l=1}^{N}(R_{il}-\hat{m}_i)\cdot(R_{jl}-\hat{m}_j)\ . \qquad (3.2)$$

Если инвестирование производится в рискованные ценные бумаги (облигации типа ГКО и ОФЗ на Российском рынке ценных бумаг, акции), то оценки элементов вектора $\vec{m}$ и матрицы W можно осуществить на основе реализованных исторических данных цен рассматриваемых активов (см. ниже).

[*/] Распределение случайных значений $(\vec{S},t)$ может быть получено в результате предварительных расчетов и экспертных оценок.

Получив оценки $\hat{m}_i$ и $\hat{W}_{ij}$, можно ставить и решать задачи оптимизации портфелей инвестиций. Обозначим через x_i долю инвестируемого капитала в объект с номером i . Очевидно доли x_i удовлетворяют естественным условиям[*/]

$$0 \le x_i \le 1 \ , \ i = 1,...,n \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ . \qquad (3.3)$$

Под портфелем инвестиций будем понимать вектор долей $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$ инвестируемого капитала в объекты $i = 1,...,n$. Задача выбора портфеля инвестиций эквивалентна задаче выбора вектора долей $\vec{x}$.

При фиксированном значении вектора $\vec{x}$ эффективность портфеля инвестиций R_p дается равенством

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i = (\vec{x}, \vec{R}) \ . \qquad (3.4)$$

Следовательно, ожидаемое среднее значение эффективности и дисперсия эффективности портфеля σ_p^2 даются равенствами:

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i = (\vec{x}, \vec{m}) \ , \qquad (3.5)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ x_i \cdot x_j \cdot W_{ij} = (W\vec{x}, \vec{x}) \ . \qquad (3.6)$$

Согласно Марковицу риск портфеля равен σ_p (иногда в качестве риска выбирают σ_p^2).

Таким образом, портфель характеризуется двумя критериями - ожидаемым средним значением эффективности портфеля

[*/] Мы исключаем случай так называемой короткой продажи (short sale), когда допускаются отрицательные значения x_i , что означает взятие i-го актива в долг (см. ниже в главе 3).

$m_p = m_p(\vec{x})$ и риском портфеля $\sigma_p = \sigma_p(\vec{x})$, причем оба критерия зависят от выбранного состава портфеля $\vec{x}$. Критерий $m_p(\vec{x})$ необходимо увеличивать, а критерий $\sigma_p(\vec{x})$ уменьшать, изменяя состав портфеля (вектор $\vec{x}$).

Известно, что оптимальное решение многокритериальных задач необходимо искать среди множества решений Парето, обладающих тем свойством, что улучшение любого критерия для решения Парето приводит к ухудшению других критериев. Множество решений Парето для двухкритериальной задачи можно найти, фиксируя один из критериев и оптимизируя другой[*/].

Согласно схеме Марковица для нахождения решений Парето двухкритериальной задачи оптимизации портфеля инвестиций осуществляется минимизация риска портфеля $\sigma_p(\vec{x})$ при фиксированных значениях ожидаемого среднего значения $m_p(\vec{x})$.

Таким образом, математическая модель оптимизации портфеля инвестиций согласно схеме Марковица имеет вид [5-8]

$$\sigma_p^2 = (W\vec{x}, \vec{x}) - \min \qquad (3.7)$$

$$x_i \ge 0 \ , \ i = 1,...,n \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i = m_p \ .$$

Очевидно m_p принадлежит промежутку $[m_{\min}, m_{\max}]$, где $m_{\min} = \min\{m_1,\dots,m_n\}$, $m_{\max} = \max\{m_1,\dots,m_n\}$.

Задача (3.7) принадлежит к классу задач квадратичного программирования, поскольку минимизируется квадратичная форма $(W\vec{x}, \vec{x})$ при линейных ограничениях типа равенств и неравенств.

[*/] В этом случае кроме решений Парето могут появиться решения, не обладающие свойством Парето, но такие «лишние» решения легко выделить и исключить.

Известно, что регулярная задача квадратичного программирования имеет единственное решение для каждого фиксированного $m_p \in [m_{\min}, m_{\max}]$ (задача (3.7) будет регулярной, если матрица W положительно определена). Положительная определенность ковариационной матрицы W означает, в частности, отсутствие полной корреляции между эффективностями вложения капитала в объекты инвестирования, образующие списочный состав портфеля.

Для того чтобы избежать посторонних непаретовских решений, необходимо сначала решить задачу формирования портфеля с минимально возможным значением риска, математическая модель которой имеет вид

$$\sigma_p^2 = (W\vec{x}, \vec{x}) - \min \qquad (3.8)$$

$$x_i \geq 0 \; , \; \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{n} \; , \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \; .$$

Решение $\vec{x}^*$ задачи формирования портфеля с минимально возможным значением риска (3.8) даётся равенством

$$\vec{x}^* = W^{-1}\vec{1} / (W^{-1}\vec{1}, \vec{1}), \qquad (3.9)$$

где вектор $\vec{1} = (1,...,1)^T$, W^{-1} -обратная матрица ковариационной матрицы W.

Если эффективности вложения капитала в различные объекты инвестирования не коррелируют между собой, то ковариационная матрица W имеет диагональный вид $W = diag(\sigma_1^2,...,\sigma_n^2)$, где $\sigma_1^2,...,\sigma_n^2$ - дисперсии эффективностей вложения капитала для рассматриваемых объектов инвестирования. В этом случае формула (3.9) даёт представление решения в виде

$$x_i = x_i^* = \left. \frac{1}{\sigma_i^2} \middle/ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2} \right. \; , \quad \mathrm{i} = 1 ,...,\mathrm{n} \, . \qquad (3.10)$$

Из (3.10) следует, что для достижения минимально возможного риска вложения капитала в объекты, пронумерованные индексом i=1,...,n , необходимо вкладывать капитал в рассматриваемые объекты так, чтобы доля капитала для i-го объекта была обратно пропорциональна дисперсии эффективности вложения капитала в этот объект.

Пример3.1 *1. Имеется три крупных инновационных проекта, внутренние ставки которых r_{effi}, i=1,2,3 согласно экспертным оценкам независимы, имеют ожидаемые средние значения 0.4, 0.5, 0.7 и среднеквадратичные отклонения 0.1, 0.15, 0.2 соответственно. Инвестору предлагают участвовать (наряду с другими инвесторами) в финансировании этих трёх проектов. В каких долях должен быть распределён инвестируемый капитал, чтобы обеспечить минимальное значение риска? Имеем*

$1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2 + 1/\sigma_3^2 = 1/0.01 + 1/0.0225 + 1/0.04 = 100 + 44.44 + 25 = 169.$

44.Тогда согласно формуле (3.9) получаем доли инвестируемого капитала, при которых обеспечено минимальное значение риска $x_1 = 100/169.44 = 0.59$, $x_2 = 44.44/169.44 = 0.26$, $x_3 = 25/169.44 = 0.15$. Итак, значение риска будет минимальным, если инвестор 59% капитала инвестирует в первый проект, 26%-во второй проект и 15%- в третий, причем $\sigma_p^* = 0.077$, $r^*_{eff} = 0.47$. Таким образом, за счет диверсификации капитала удалось снизить среднеквадратичное отклонение почти в два раза.

Пример3.2*. В целях упрощения рассмотрим два инновационных проекта. Тогда $\sigma_p^2 = x^2\sigma_1^2 + 2x(1-x)\sigma_1^2\sigma_2^2 k + (1-x)^2\sigma_2^2$, где x-доля капитала, вкладываемого в первый проект, k-коэффициент корреляции эффективных ставок r_{eff1}, r_{eff2}. Пусть k =-1. Тогда $\sigma_p^2 = (x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2)^2$. Следовательно, при $x = \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)$ получаем $\sigma_p^2 = 0$.*

Таким образом, если эффективные ставки изменяются в противофазе так, что коэффициент корреляции равен –1, то при соответствующем выборе соотношения долей капитала, вкладываемого в проекты, можно добиться нулевого значения портфельного риска.

Пусть $x_i = x_i^*$, i=1,...,n - решение задачи (3.8), т.е. портфель инвестиций $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ обеспечивает минимальный риск вложения капитала. Уменьшение риска для портфеля $\vec{x}^*$ по сравнению с риском вложения капитала в отдельные объекты инвестирования происходит за счет диверсификации капитала между несколькими объектами.

Обозначим $m_p^* = (\vec{x}^*, \vec{m})$ - ожидаемое значение эффективности портфеля инвестиций с наименьшим риском вложения средств.

Тогда решения нижеследующей задачи и только они являются паретовскими для двухкритериальной задачи Марковица (3.7)

$$\sigma_p^2 = (W\vec{x}, \vec{x}) - \min$$

$$x_i \geq 0 \ , \ \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{n} \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i = m_p \ , \quad (3.11)$$

$$m_p \in [\, m_p^*, m_{\max}\,].$$

Для фактического нахождения решений задачи (3.11) необходимо на интервале $m_p \in [\, m_p^*, m_{\max}\,]$ выбрать дискретное множество точек $m^{(j)}$, j=1,...,L-1, например, распределив их равномерно $m^{(j)} = m_p^* + j \cdot h, h = (m_{p\,\max} - m_p^*) / L$.

Затем задача (3.11) решается для каждого фиксированного значения $m_p = m^{(j)}$, j=1,...,L-1 . Полученная совокупность портфелей $\vec{x}^{(j)}$ с ожидаемым значением эффективности

вложения капитала $m_p = m^{(j)}$ и риском $\sigma^{(j)2} = (W\vec{x}^{(j)}, \vec{x}^{(j)})$, j=1,...,L-1 принадлежит паретовскому множеству портфелей инвестиций (такие портфели принято также называть эффективными портфелями или эффективными решениями задачи (3.11)).

Можно доказать, что на плоскости (m_p, σ_p^2) кривая паретовских решений задачи Марковица (3.11) возрастающая и выпукла вниз (см.рис.1).

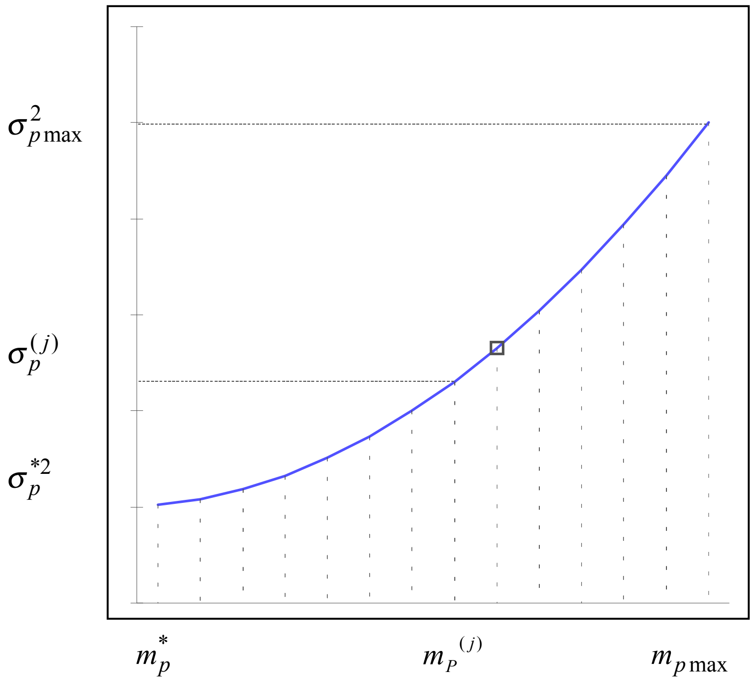

Рис. 1.

На рис.1 показано также множество паретовских точек $(m^{(j)}, \sigma^{(j)2})$, j=1,...,L-1.

Таким образом, множество эффективных портфелей обладает тем свойством, что для любой пары эффективных портфелей при большей ожидаемой величине эффективности вложения капитала будет и большее значение риска.

Окончательный выбор портфеля следует проводить среди множества эффективных портфелей, устанавливая приемлемый для инвестора компромисс между уровнем ожидаемой эффективности портфеля и его риском. Инвесторы, избегающие риска, выберут портфели, близкие к $\bar{x}^*$ с наименьшим уровнем риска σ_p^*, но и с наименьшей ожидаемой эффективностью среди паретовских портфелей. Инвесторы, склонные к риску в условиях наличия большей ожидаемой эффективности, выберут портфели, близкие к портфелю, определяемому точкой $(m_{p\max}, \sigma^2_{p\max})$.

На самом деле при решении любой инвестиционной задачи для инвестора в большинстве случаев есть еще одна альтернатива - помещение капитала в государственные бумаги с безрисковой банковской ставкой r_B. В этом случае, в списочный состав объектов инвестирования следует включить и объект с эффективностью, определяемой ставкой r_B и нулевым риском.

Задачи оптимизации портфелей инвестиций при наличии объекта инвестирования с нулевым риском были рассмотрены и решены американским экономистом Д.Тобиным (ныне лауреатом Нобелевской премии по экономике).

Эффективные решения Тобина задачи оптимизации портфеля наиболее просто представить графически (см.рис.2).

Для графического построения множества точек (m_p, σ_p^2), соответствующих эффективным портфелям в условиях наличия объекта с нулевым риском, сначала необходимо решить задачу Марковица (3.11), исключив объект с нулевым риском. Точки (m_p, σ_p^2) для множества эффективных портфелей без учета объекта с нулевым риском представлены на рис.2 кривой $M_{min}M_{max}$. Затем на оси эффективностей фиксируется точка M_0 с эффективностью m_0, соответствующая безрисковому вложению капитала. И наконец из точки M_0 проводится касательная к кривой Марковица $M_{min}M_{max}$.

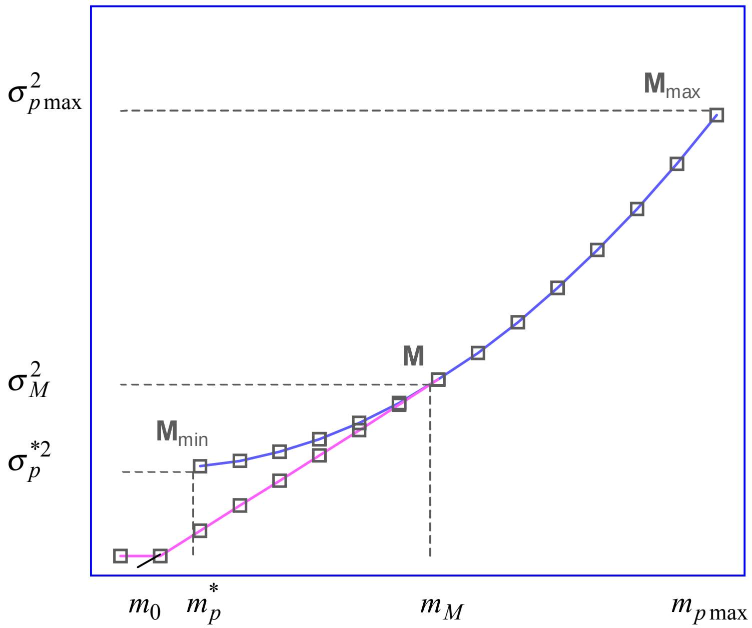

Рис. 2.

Поскольку кривая Марковица $\mathrm{M}_{\min}\mathrm{M}_{\max}$ возрастает и выпукла вниз, то существует единственная точка касания M семейства прямых лучей, исходящих из точки M_0.

Точкам M' отрезка $\mathrm{M}_0\mathrm{M}$ соответствуют эффективные портфели с распределением инвестируемого капитала в пропорции: $x_0\% = \dfrac{(m_M - m'_p)\cdot 100\%}{m_M - m_0}$ капитала инвестируется в безрисковый портфель, а оставшаяся часть $(100 - x_0)\%$ капитала - в рискованные объекты в долях, определяемых

точкой M, т.е. $(100 - x_0)\cdot x_{iM}\%$, i=1,...n, капитала инвестируется в i-й объект, где $\vec{x}_M = (x_{1M},\ldots,x_{nM})^T$ - эффективный портфель, соответствующий точке M.

Рискованная часть всех эффективных портфелей, соответствующих точкам отрезка $\mathrm{M}_0\mathrm{M}$, одинакова; для этих портфелей изменяется лишь доля вложения капитала в безрисковую часть от нуля (для точки M) до единицы (для точки M_0).

Множеству всех эффективных портфелей соответствуют точки отрезка $\mathrm{M}_0\mathrm{M}$ и кривой $\mathrm{MM}_{\max}$.

В заключение главы приведём схему формирования портфеля в условиях, когда допускается короткая продажа (short sale). Заметим, что операция short sale имеет смысл прежде всего на рынке акций. Математически разрешение на короткую продажу означает, что доли x_i могут принимать отрицательные значения, причём отрицательное значение x_i означает, что акции i-го объекта инвестирования должны браться инвестором в долг для проведения операции short sale. Более подробную информацию об операции short sale на рынках ценных бумаг можно найти в[6].

Математическая модель формирования портфеля при наличии short sale имеет вид

$$\min(\mathrm{W}\vec{x},\vec{x}), \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m_p .$$

Введём матрицу A размера (2xn) первая строка которой состоит из 1 (1,…,1), а вторая из (m_1,…,m_n), и вектор $\vec{f}$ размера 2 $\vec{f}=(1, m_p)^T$.

Можно показать, что решение $\vec{x}_{opt}$ задачи (3.12) даётся равенством

$$\vec{x}_{opt} = \mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}^T(\mathrm{A}\mathrm{W}^{-1}\mathrm{A}^T)^{-1}\vec{f}, \tag{3.13}$$

где A^T-двухстолбцовая транспонированная к A матрица, первый столбец которой образуют элементы первой строки матрицы A (они равны 1), а второй столбец образован числами второй строки матрицы A ($m_1,\ldots,m_n$).

Фиксируя в векторе $\vec{f}$ различные величины $m_p \in [m_{min}, m_{max}]$ с помощью формулы (3.13) получаем эффективные портфели с минимальными рисками при фиксации среднего ожидаемого значения эффективности портфеля m_p.

Пример3.3. *Рассмотрим три объекта инвестирования, для которых ковариационная матрица W и вектор средних ожидаемых значений эффективности вложения капитала* $\vec{m}$ *определяются с помощью равенств*

W=diag(1/4, 1/3, ½)-диагональная матрица, $\vec{m} =(1,2,3)^T$.

Таким образом, для рассматриваемых объектов инвестирования эффективности вложения капитала не коррелируют друг с другом.

Используя формулу (3.13), получаем зависимость долей x_i *эффективных портфелей от среднего ожидаемого значения эффективности портфеля* m_p

$x_1=1.44-0.56m_p$, $x_2=0.12+0.12m_p$, $x_3=-0.56+0.44m_p$.

Полагая, например, $m_p=2$, *получаем* $x_1=0.32$, $x_2=0.36$, $x_3=0.32$, $\sigma_p^2=0.12$. *Таким образом, риск* σ_p^2 *эффективного портфеля при* $m_p= 2$ *почти в три раза меньше риска второго объекта инвестирования, для которого* $m_p=2$, $\sigma_p^2=1/3\approx 0.33$. *Такое существенное снижение риска произошло за счет оптимальной диверсификации капитала.*

Глава 4. Модификации схемы Марковица с учетом российских условий

Рассмотрим теперь некоторые модификации модели Марковица и применение их к задачам инвестирования капитала на фондовом рынке акций с учетом российских условий [11,12].

Математическая модель Марковица (3.7) не накладывает никаких ограничений на доли x_i, i=1,...n, кроме естественных (3.3).Однако при решении практических инвестиционных задач на доли x_i часто приходится накладывать априорные ограничения.

Пусть, например, капитал инвестируется на фондовом рынке в акции. Тогда, исходя из предварительных оценок, а часто из реальных возможностей, ограничивающих сверху количество акций, которое можно купить на фондовом рынке, вводятся априорные ограничения на количество акции в портфеле, а тем самым на доли формируемого портфеля. Такие ограничения имеют вид групповых

$$a_j \le x_{j1}+\ldots+x_{jm_j} \le b_j,\quad j=1,\ldots m, \tag{4.1}$$

$$m_1+\ldots+m_m = n,$$

где m - количество априорных групп, m_j - количество объектов инвестирования в j-й группе, a_j, b_j ($0 \le a_j \le b_j \le 1$) - нижняя и верхняя границы суммарной доли j-й группы.

Предполагается, что каждый объект инвестирования (каждый индекс i=1,...n) входит в одну и только в одну из групп (4.1).

Для того чтобы система априорных ограничений (4.1) была непротиворечивой, необходимо и достаточно выполнения условий $\sum_{j=1}^{m} a_j < 1, \sum_{j=1}^{m} b_j \ge 1$. В частности, если $a_j = b_j$, j=1,...n, то это означает фиксацию в формируемом портфеле суммарной доли инвестируемого капитала объектов, входящих в j-ю группу.

Часто система априорных ограничений (4.1) имеет вид

$$a_j \le x_j \le b_j \text{ , j=1,...n} \quad , \qquad (4.2)$$

т.е. ограничения накладываются отдельно на доли инвестируемого капитала для каждого объекта.

При наличии априорных ограничений для нахождения паретовских эффективных портфелей имеем задачу

$$\sigma_p^2 = (W\bar{x}, \bar{x}) - \min$$

$$x_i \ge 0 \text{ , i = 1,...,n , } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ ,} \qquad (4.3)$$

$$a_j \le x_{j1} + \ldots + x_{jm_j} \le b_j \text{ , j=1,...m,}$$

$$(\bar{m}\ ,\bar{x}) \in [\, m_p^*, m_{\max}\,] \text{ ,}$$

где (m_p^*, σ_p^{*2}) и $(m_{p\max}, \sigma_{p\max}^2)$ определяется решениями нижеследующих задач

$$(W\bar{x}, \bar{x}) - \min \qquad (4.4)$$

$$x_i \ge 0 \text{ , i = 1,...,n , } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ , } a_j \le x_{j1} + \ldots + x_{jm_j} \le b_j \text{ ,}$$

j=1,...m,

$$m_p^* = (\bar{m}\ ,\bar{x}^*) \text{ , } \sigma_p^{*2} = (W\bar{x}^*, \bar{x}^*) \text{ ,}$$

$\bar{x}^*$ - решение задачи (4.4),

$$(\bar{m}\ ,\bar{x}) - \max \qquad (4.5)$$

$$x_i \ge 0 \text{ , i = 1,...,n , } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ , } a_j \le x_{j1} + \ldots + x_{jm_j} \le b_j \text{ ,}$$

j=1,...m,

$$m_{p\max} = (\bar{m}\ ,\bar{x}_{\max}) \text{ , } \sigma_{p\max}^2 = (W\bar{x}_{\max}\ ,\bar{x}_{\max}) \text{ ,}$$

$\bar{x}_{\max}$ - решение задачи (4.5).

В задаче (4.4) находится эффективный портфель наименьшего риска, удовлетворяющий априорным ограничениям (4.1), а в задаче (4.4) - эффективный портфель с максимально ожидаемой доходностью.

(4.4)- задача квадратичного программирования, которая решается на компьютере одним из хорошо разработанных в вычислительной математике численных методов.

(4.5)- задача линейного программирования, которая эффективно решается на компьютере с помощью специального алгоритма, учитывающего специфику задачи (4.5) (конечно, задачу (4.5) можно решить с помощью известного симплекс-метода, но в данном случае применение симплекс-метода нецелесообразно) [11].

Как и в задаче Марковица (3.7) множество точек (m_p, σ_p^2) соответствующих паретовским эффективным решениям задачи (4.3), на плоскости (m_p, σ_p^2) образуют возрастающую, выпуклую вниз кривую.

Следующая модификация модели Марковица связана с ситуацией, когда имеет место сильная коррелируемость эффективностей вложения капитала в рассматриваемые объекты инвестирования. В этом случае ковариационная матрица W вектора эффективностей $\bar{R}$ плохо обусловлена или вырождена и, следовательно, задача Марковица (3.7) и задача оптимизации портфеля инвестиций в условиях наличия априорных ограничений (4.3) принадлежат к классу некорректно поставленных задач, что порождает неустойчивость при их решении [9]. Экономико-финансовой причиной неустойчивости задачи оптимизации портфеля инвестиций является то обстоятельство, что риск портфеля может слабо изменяться при распределении капитала между объектами, у которых эффективности сильно коррелируют между собой. Неустойчивость задачи оптимизации портфеля инвестиций с вычислительной точки зрения требует ее регуляризации [9,10].

Однако, как это часто бывает и в жизни, реализуется правило - «нет худа без добра». Вырожденность ковариационной матрицы W можно использовать, чтобы без значительного увеличения риска портфеля добиться оптимизации дополнительного критерия. Дело в том, что кроме двух рассматриваемых до сих пор критериев - ожидаемого значения эффективности и риска портфеля часто желательно оптимизировать, по крайней мере, еще один критерий. Наиболее значительным дополнительным критерием является объем перевложений, связанный с реструктуризацией старого состава портфеля в новый. Этот дополнительный критерий имеет особо важное значение, когда объемы перевложений велики (реструктуризация «большого» портфеля).

Математически критерий объема перевложений $J_{dis}(\vec{x},\vec{x}_0)$ описывается «расстоянием» между старым и новым составами портфеля $\vec{x}_0 = (x_{10},\dots,x_{n0})^T$ и $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)^T$

$$J_{dis}(\vec{x},\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot (x_i \cdot S_p - x_{i0} \cdot S_0)^2 \ , \qquad (4.6)$$

где $S_0(S_p)$ - инвестируемый капитал в старом (новом) составах портфеля,

d_i - положительные числа, определяемые финансовым содержанием объектов инвестирования. Например, если инвестиции производятся на рынке ценных бумаг, то $d_i = 1/P_i^2$, где P_i - стоимость одной ценной бумаги i-го эмитента.

Заметим, что в общем случае $S_0 \neq S_p$, поскольку на дату реструктуризации портфеля из него (или в него) может выводиться (вводиться) определенный капитал.

С учетом критерия объема перевложений регуляризованная задача оптимизации портфелей инвестиций имеет вид

$$\sigma_p^2 = (W\vec{x},\vec{x}) + \alpha \cdot J_{dis}(\vec{x},\vec{x}_0) - \min ,$$

$$x_i \geq 0,\ \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{n},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , \qquad (4.7)$$

$$a_j \leq x_{j1} + \dots + x_{jm_j} \leq b_j ,\quad \mathrm{j}=1,\dots\mathrm{m},$$

$$(\vec{m}\ ,\vec{x}) \in [\, m_p^*, m_{\max} \,],$$

где $\alpha > 0$ - параметр регуляризации, устанавливающий уровень компромисса между риском портфеля и критерием объема перевложений.

Математически задача (4.7) также принадлежит к классу задач квадратичного программирования и решается на компьютере с помощью специального алгоритма, позволяющего в том числе, выбирать подходящее значение параметра регуляризации $\alpha > 0$.

В настоящее время математическая модель оптимизации портфелей инвестиций с учетом критерия объема перевложений реализована в программном комплексе, используемом различными организациями Российской Федерации на рынках ценных бумаг.

Ранее уже отмечалось, что реализация схемы Марковица или ее модификаций требуют знания оценок вектора ожидаемых значений эффективностей $\vec{m}$ и элементов ковариационной матрицы W.

Пусть инвестирование капитала производится на рынке акций. Тогда эффективность вложения средств R в акции i-го эмитента подсчитывается согласно формулы

$$R_i(t,T) = (P_i^{пок}(t+T) - P_i^{прод}(t) + D_i(t,T)) \,/\, P_i^{прод}(t) , \quad (4.8)$$

где $P_i^{пок}(t+T), P_i^{прод}(t)$ - цены покупки, продажи (со стороны биржи) одной акции i-го эмитента на соответствующие даты; T- период инвестирования средств; $D_i(t,T)$ - дивиденды на одну акцию i-го эмитента, приходящиеся на временной интервал [t,t+T].

Если формирование инвестиционного портфеля производится на фондовом рынке акций, а число включаемых в списочный состав объектов инвестирования (эмитентов ценных бумаг) невелико, то искомые характеристики вектора эффективностей $\vec{R}$ могут быть оценены по реализованным (историческим) значениям вектора $\vec{R}$ за время, предшествующее текущей дате, на которую производится формирование оптимального состава портфеля, согласно равенствам

$$\hat{m}_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=1}^{N} R_i(t_l, T) \quad , \qquad (4.9)$$

$$\hat{W}_{ij} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{l=1}^{N} (R_i(t_l, T) - \hat{m}_i) \cdot (R_j(t_l, T) - \hat{m}_j) \quad ,$$

где $t_N < t_{N-1} \ldots < t_1 < t$ - текущая дата, на которую производится формирование оптимального состава портфеля.

Однако, если количество эмитентов n , подлежащих рассмотрению при формировании портфеля, превосходит несколько десятков (а такой порядок числа рассматриваемых эмитентов встречается довольно часто), то надежность оценок $\hat{m}$ и $\hat{W}$ непосредственно по реализованным историческим значениям $R_i(t_l, T)$ согласно формулам (4.9) становится неприемлемой из-за несоответствия требования большого числа реализаций $N >> n^2$ и возможности использования на практике этого числа реализаций без существенного искажения оценок на текущую дату.

Выход из описанной ситуации на рынке акций был найден У.Шарпом, который предложил простую, но как выяснилось затем, конструктивную однофакторную регрессионную модель связи эффективностей отдельных объектов инвестирования и эффективности рынка в целом [*/].

Математическая модель Шарпа имеет вид

$$R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i \quad , \ \text{i = 1,...,n} \ , \qquad (4.10)$$

[*/] В дальнейшем модель Шарпа была обобщена на случай учета многих факторов (см.ниже).

где R_M - эффективность рынка в целом, реализации которой подсчитываются как средневзвешанные реализаций R_i с весами, пропорциональными объемам общего капитала инвестиций рынка, помещенного в акции i-го эмитента.

Параметры регрессионной модели (4.10) α_i и β_i называются альфа и бета - коэффициентами, а их значения для акций ведущих корпораций и фирм регулярно публикуются в прессе и передаются по различным каналам связи [**/].

В модели Шарпа (4.10) предполагается, что $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ - независимы, т.е. взаимная корреляция эффективностей акций различных эмитентов обусловлена только их взаимосвязью через эффективность рынка в целом.

Элементы ковариационной матрицы W определяются через бета-коэффициенты модели (4.10):

$$W_{ij} = \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_M^2 \ , \ \text{i,j = 1,...,n} \ , \ i \neq j \ ,$$

$$W_{ii} = \sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma^2(\varepsilon_i) \ .$$

Таким образом, риск вложения капитала в акции i-го эмитента σ_i^2 складывается из двух рисков: $\beta_i \cdot \sigma_M^2$ - риск, обусловленный случайными колебаниями эффективности вложения капитала в акции i-го эмитента из-за случайных колебаний эффективности рынка в целом (факторный риск), $\sigma^2(\varepsilon_i)$ -риск, вызванный собственными независимыми случайными колебаниями эффективности акций i-го эмитента (нефакторный риск).

[**/] Иногда под альфа и бета-коэффициентами понимаются модифицированные специальным образом коэффициенты α_i и β_i формулы (4.10).

Можно показать, что диверсификация инвестиционного капитала приводит к усреднению факторного (рыночного) риска и снижению нефакторного (собственного) риска.

В настоящее время кроме однофакторной модели Шарпа используются многофакторные модели вида

$$R_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{M} \beta_{ik} \cdot F_k + \varepsilon_i \quad , \ \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{n} \, , \qquad (4.11)$$

где $F_1,...,F_M$ -факторы, влияющие на изменения эффективностей акций.

В качестве основных учитываемых факторов обычно берутся: уровень банковских ставок; уровень инфляции; цены на основные сырьевые ресурсы (нефть, газ и т.д.); отраслевые факторы.

В странах с развитой рыночной экономикой широко используется многофакторная модель BARRA, которая содержит 68 фундаментальных и отраслевых факторов [6].

Кроме традиционных одноуровневых многофакторных моделей, включая модель BARRA , можно использовать двухуровневые многофакторные модели [12]. Например, при учете трех факторов - эффективность рынка в целом R_M; эффективности отрасли $R_{(I)}$ и региона $R_{[r]}$, которым принадлежит рассматриваемое предприятие-эмитент, двухуровневая модель имеет вид

$$R_i = a_i + b_{i,M} \cdot R_M + b_{i,I} \cdot R_{(I)} + b_{i,r} \cdot R_{[r]} + \varepsilon_i \ , \qquad (4.12)$$

$$R_{(I)} = a_{(I)} + b_{(I),M} R_M + \varepsilon_{(I)},$$

$$R_{[r]} = a_{[r]} + b_{[r],M} \cdot R_M + \varepsilon_{[r]}.$$

В модели (4.12) $\varepsilon_i, \varepsilon_{(I)}, \varepsilon_{[r]}$ - независимые случайные флуктуации эффективностей акций i-го эмитента, I-ой отрасли, r-го региона соответственно.

Согласно двухуровневой модели (4.12) стохастическая зависимость эффективности R_i от рынка осуществляется не

только непосредственно, но и через стохастическую зависимость R_i от эффективностей отрасли и региона, которым принадлежит рассматриваемое предприятие-эмитент.

Двухуровневая модель позволяет, в частности, выделить в альфа и в бета-коэффициентах, а также в риске для акций каждого эмитента аддитивные составляющие, относящиеся к рынку в целом, к отрасли и к региону, что дает возможность производить анализ степени влияния на альфа и бета-коэффициенты и риск рынка в целом отрасли и региона.

Возможность такого выделения имеет особую значимость для рынка акций в Российской Федерации, где влияние отраслей и регионов на финансово-экономические характеристики предприятий имеет первостепенное значение.

Согласно исходной модели (4.12) получаем равенство

$$\mathrm{R_i} = \alpha_i + \beta_i R_M + \gamma_i \, , \qquad (4.13)$$

где

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i(I)} + \alpha_{i[r]},$$
$$\beta_i = \beta_{i0} + \beta_{i(I)} + \beta_{i[r]}, \qquad (4.14)$$
$$\gamma_i = \varepsilon_{i0} + \varepsilon_{i(I)} + \varepsilon_{i[r]},$$

$$\alpha_{i0} = \mathrm{a_i},\ \alpha_{i(I)} = \mathrm{b_{i,I} a_{(I)}},\ \alpha_{i[r]} = \mathrm{b_{i,r} a_{[r]}},$$
$$\beta_{i0} = \mathrm{b_{i,M}},\ \beta_{i(I)} = \mathrm{b_{i,I} b_{(I),M}},\ \beta_{i[r]} = \mathrm{b_{i,r} b_{[r],M}}, \qquad (4.15)$$
$$\varepsilon_{i0} = \varepsilon_i\ ,\ \varepsilon_{i(I)} = \mathrm{b_{i,I}} \varepsilon_{(I)},\ \varepsilon_{i[r]} = \mathrm{b_{i,r}} \varepsilon_{[r]}.$$

Следовательно величины, входящие в (4.14), (4.15), имеют следующие значения:

α_i-суммарный α-коэффициент i-го эмитента, α_{i0}-вклад в α-коэффициент за счет прямой связи i-го эмитента с рынком; $\alpha_{i(I)}$-вклад в α-коэффициент за счет связи i-го эмитента с рынком через отрасль, к которой принадлежит эмитент; $\alpha_{i[r]}$-вклад в α-коэффициент за счет i-го эмитента с рынком через регион, к которому относится рассматриваемый эмитент.

Аналогичные значения имеют составляющие β-коэффициента.

Из формул (4.14), (4.15) следует представление для дисперсии (риска в схеме Марковица) i-го эмитента

$$\sigma^2(\mathrm{R_i})=\sigma_i^2+\sigma_{i(I)}^2+\sigma_{i[r]}^2+\sigma_{i,M}^{\ 2},$$

где

σ_i^2-составляющая риска из-за собственных независимых флуктуаций эффективности эмитента;

$\sigma_{i(I)}^2=b_{i,I}^2\sigma^2(\varepsilon_{(I)})$-составляющая риска из-за собственных флуктуаций эффективности отрасли, к которой относится эмитент;

$\sigma_{i[r]}^2=b_{i,r}^2\sigma^2(\varepsilon_{[r]})$-составляющая риска из-за собственных флуктуаций эффективности региона, к которому принадлежит эмитент;

$\sigma_{i,M}^2=\beta_i^2\sigma^2(R_M)$-составляющая риска из-за флуктуаций эффективности рынка в целом.

Полученные оценки коэффициентов модели (4.14) позволяют оценить ковариации между различными отраслями и регионами, что даёт возможность проводить корреляционный анализ для отраслей и регионов.

Выше были рассмотрены задачи оптимизации портфелей инвестиций в постановках, модифицирующих классическую схему оптимизации Марковица, включая случаи неустойчивости задач оптимизации. Однако часто, и в особенности это касается российских рынков инвестиций, необходимо рассматривать постановки задач оптимизации портфелей инвестиций, принципиально отличающиеся от схемы Марковица. Прежде всего принципиальное отличие новых постановок от схемы Марковица касается необходимости рассмотрения нового определения риска инвестиций, связанного с формированием портфеля инвестиций.

Дело в том, что определение расчетных значений эффективностей и рисков в схеме оптимизации Марковица соответственно как среднее значение эффективности и среднеквадратического отклонения от среднего значения эффективности, трактуемой как случайная величина, часто не соответствует реальной ситуации на рынке инвестиций.

Пусть, например, эффективность рассматриваемого объекта инвестирования имеет устойчивую тенденцию роста во времени. В этом случае, принимая решение об инвестировании в рассматриваемый объект, мы должны в качестве прогнозируемой величины эффективности брать не ее среднее значение по уже реализованным значениям, а ту величину, которая определяется тенденцией роста на будущий промежуток времени, назначаемый инвестором как срок формирования портфеля инвестиций. При таком выборе расчетного значения эффективности в качестве риска следует брать меру отклонения от прогнозируемого значения.

В соответствии с вышесказанным примем следующее определение расчетного значения эффективности и риска.

В качестве базовой величины, в отличие от схемы Марковица будем брать прогнозируемое значение эффективности на будущую дату, причем длина промежутка от этой будущей даты до текущей даты равна длине промежутка, для которого определена эффективность. В качестве риска вложения капитала в инвестируемый объект будем брать меру отклонения от прогнозируемого значения эффективности.

Определение базовой величины эффективности и её расчетных значений в схеме Марковица является частным случаем рассматриваемой схемы. В схеме Марковица расчетные значения эффективностей и рисков одинаковы для всех инвесторов (с точностью до погрешностей оценок математического ожидания и среднеквадратичного отклонения эффективности, трактуемой как случайная величина). Эти величины являются как бы внутренними характеристиками самого объекта инвестирования. По существу в схеме Марковица-Шарпа-Тобина заложено правило равной информативности всех участников инвестиционного рынка. Такая схема часто неадекватно описывает реальную ситуацию на любом инвестиционном рынке. С некоторой степенью натяжки ещё можно согласится с тем мнением, что большинство участников рынка одинаково информировано и не обладает дополнительной информацией о будущем состоянии рынка, кроме той информации, которая имеется в уже реализованных значениях характеристик рынка (на основе которых, в частности, подсчитываются эффективности). Но совершенно неправильной является гипотеза о том, что в качестве расчетных значений эффективностей и рисков большинство инвесторов (а тем более все) будут брать оценки математических ожиданий и среднеквадратичных отклонений эффективностей, подсчитываемых по уже реализованным значениям. И уже совсем неправомочной являлась бы рекомендация применения во всех случаях в качестве расчетных значений эффективностей и рисков оценок математических ожиданий и среднеквадратичных отклонений эффективностей.

Данное выше определение расчетных значений эффективностей и рисков позволяет при реализации предложенной схемы оптимизации добиться лучшего результата по инвестированию в условиях лучшего прогноза ожидаемых значений эффективностей. Прогноз расчетных значений эффективностей и рисков становится индивидуальным для каждого инвестора и позволяет брать в качестве расчетных значений эффективностей и рисков в задаче оптимизации портфеля инвестиций те значения, которые согласно индивидуальному прогнозу инвестора, полученному, возможно, с привлечением дополнительной априорной информации, являются наиболее приемлемыми.

Следовательно, каждый инвестор (решающий задачу оптимизации) для любого рассматриваемого им объекта

инвестирования должен оперировать со случайной величиной – прогнозным значением эффективности R_{pre} на будущую дату, отстоящую от текущей даты на временном расстоянии, равном промежутку, для которого определена эффективность.

Возьмём для конкретизации один из возможных вариантов расчетных значений эффективностей и рисков.

Определим расчетные значения эффективности и риска рассматриваемого объекта инвестирования для данного инвестора как математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины R_{pre}.

При составлении портфеля инвестиций, в который входят n объектов инвестирования, пронумерованных индексом i=1,…,n, необходимо оценить ковариационную матрицу системы случайных величин

$$\mathbf{R}_{pre}= (R_{1pre},\ldots,R_{npre})^T,$$

где R_{ipre} – прогнозируемая эффективность i-го объекта инвестирования для рассматриваемого инвестора.

Пусть для получения прогнозируемых значений эффективностей инвестор использует имеющейся у него алгоритм (схему) прогноза, который может быть применен и к уже реализованным датам в прошлом (возможно не ко всем). Таким образом, предполагается, что для набора прошлых дат $t=t_1,\ldots,t_N$ алгоритм прогноза позволяет прогнозировать для будущего промежутка длиной T значения эффективностей $R_{ipre}(t_k)$, i=1,…,n, k=1,…,N.

Пусть $R_i(t_k)$ – реализованные значения эффективностей. Тогда, в предположении стационарности ковариационной матрицы W, для вектора прогнозных эффективностей $\mathbf{R}_{pre}$ получаем оценку её элементов W_{ij} :

$$W_{ij}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(R_{ipre}(t_k)-R_i(t_k))(R_{jpre}(t_k)-R_j(t_k)),$$

$$i,j=1,\ldots,n.$$

Пусть, например, прогнозируемые значения эффективностей R_{ipre} на текущую дату принадлежат конечным промежуткам

$$R_{imin} \le R_{ipre} \le R_{imax},\ i=1,\ldots,n$$

и случайные величины R_{ipre}, $i=1,\ldots,n$ попарно не коррелируют. Тогда, если постулируется равномерный закон распределения для каждой R_{ipre}, имеем равенство:

$$W=\mathrm{diag}(\sigma^2(R_{1pre}),\ldots,\sigma^2(R_{npre}))$$

-диагональная матрица, $\sigma^2(R_{ipre})=(R_{imax}-R_{imin})^2/12$, $i=1,\ldots,n$.

Согласно введенному определению прогнозных эффективностей и рисков для задачи оптимизации портфеля инвестиций, в качестве расчетных значений эффективностей берется оценка вектора ожидаемых средних значений $M\mathbf{R}_{pre}=(MR_{1pre},\ldots,MR_{npre})^T$, а в качестве матрицы W-оценка ковариационной матрицы вектора $\mathbf{R}_{pre}$.

Дадим ещё одну конструктивную схему определения риска при формировании портфелей инвестиций.

Обозначим через p_i вероятность события ($R_{ipre}>R_j$) для всех $j=1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$.

Предположим, что $p_i=0$. Последнее означает, что при любом исходе реализованная эффективность i-го объекта инвестирования никогда не будет превосходить реализованные значения эффективностей всех других объектов инвестирования. Следовательно, с точки зрения оптимизации портфеля инвестиций, когда в качестве критериев берутся его ожидаемое значение эффективности и риск, совершенно бесполезно вкладывать капитал в i-й объект инвестирования, капитал следует распределять только среди тех объектов инвестирования, для которых $p_i>0$, в этом случае получим заведомо большее реализованное значение эффективности. Таким образом, i-й объект инвестирования, для которого $p_i=0$, должен быть исключен из списочного состава объектов, входящих в портфель инвестиций.

Следовательно, при решении задачи оптимизации портфеля риск вложения капитала в i-й объект инвестирования должен неограниченно возрастать при уменьшении p_i вплоть до нуля.

Наоборот, если $p_i=1$, то риск вложения капитала в этот объект инвестирования при формировании портфеля равен нулю, даже если его собственный риск Марковица σ_{ipre}^2 отличен от нуля и возможно превосходит собственные риски всех других объектов инвестирования.

Список литературы

1. Холт Р., Барнес С. Планирование инвестиций. М.: Дело ЛТД, 1994.
2. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов. М.: Финансы и статистика, 1994.
3. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. М.: Инфра-М, 1997.
4. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: Расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994.
5. О Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. М.: Дело ЛТД, 1995.
6. Шарп У.Ф. , Александер Г. Дж., Бэйли Д.В. Инвестиции. М.: Инфра-М, 1997.
7. Лукашин Ю.П. Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг. Экономика и математические методы, т.31, вып.1, 1995.
8. Первозванский А.А., Баринов В.Ю. Прогнозирование и оптимизация на рынке краткосрочных облигаций. Экономика и математические методы, т.33 , вып.4 , 1997.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
10. Арсенин В.Я., Крянев А.В. Обобщенный метод максимального правдоподобия решения конечномерных некорректных задач// ЖВМиМФ. Т. 31, №5,1991.
11. Крянев А.В., Черный А.И. Численные решения оптимизационных задач для математических моделей теории инвестиций// Математическое моделирование,8(8), 1996.
12. Крянев А.В., Черный А.И. Математические модели взаимодействия эффективностей инвестиций. М.: Препринт/ МИФИ 009-96, 1996.

Задания для самостоятельной работы

Задание №1. Расчет коэффициентов наращения и дисконтирования капитала.

Коэффициент наращения капитала от даты $t_2 > t_1$ $A(t_1,t_2) = S(t_2)/S(t_1)$ и коэффициент дисконтирования $d = \dfrac{1}{A(t_1,t_2)}$ при непрерывном начислении процентов определяются согласно формулам

$$A(t_1,t_2) = \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\right),\ d(t_1,t_2) = \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt\right),$$

где $\delta(t)$ - значение годовой ставки на дату t .

В январе 2002г. годовая банковская ставка будет равна 19%, а затем будет повышаться до конца года на 1% каждый месяц (начиная с 1-го числа каждого нового месяца).

Рассчитать коэффициенты наращения и дисконтирования капитала, помещенного в банк на указанный в варианте период.

№ вар.	Период
1	4.01 - 25.06
2	20.02 - 15.08
3	15.01 - 20.07
4	16.02 - 20.08
5	16.03 - 20.09
6	1.03 - 15.08
7	16.03 - 31.08
8	16.02 - 30.06
9	4.01 - 28.05
10	1.02 - 15.10
11	16.04 - 31.10
12	1.02 - 15.07
13	1.04 - 31.12
14	1.04 - 28.10
15	16.05 - 25.12
16	1.05 - 28.09
17	4.01 - 17.06
18	1.03 - 27.09
19	1.03 - 15.10
20	16.02 - 27.08
21	1.02 - 29.10
22	5.01 - 27.07
23	1.04 - 28.12
24	28.03 - 27.09
25	1.02 - 15.09
26	16.02 - 28.11
27	5.01 - 16.11
28	2.02 - 31.08
29	5.05 - 29.12
30	4.01 - 31.12

Задание №2. Характеристики потока платежей инвестиционных проектов.

Пусть задан поток платежей $S_k, t_k, k = 0,1,..,n$, где S_k берутся со знаком минус, если сумма S_k инвестируется, и со знаком плюс, если сумма S_k поступает в виде дохода, t_k - дата инвестирования или поступления суммы S_k.

$$NPV = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot d(t_0, t_k),$$

называется чистой приведенной величиной потока платежей (Net Present Value).

Пусть годовая банковская ставка r постоянна от даты t_0 до даты t_n. Тогда в условиях непрерывного начисления процентов

$$d(t_0, t_k) = \exp(-r \cdot (t_k - t_0)).$$

Величина $IRR = r_{ef}$, являющаяся корнем уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} S_k \cdot \exp(-r_{ef} \cdot (t_k - t_0)) = 0$$

называется внутренней ставкой потока платежей (Internal Rate of Return).

Обозначим $f(x) = \sum_{k=0}^{n} S_k \cdot x^{\alpha_k}$, $x = \exp(-r_{ef})$, $\alpha_k = t_k - t_0$.

Тогда $IRR = -\ln x^*$, где x^* является пределом последовательности Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ x_0 = 1,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot \alpha_k \cdot x^{\alpha_k - 1}.$$

Для заданного варианта потока платежей инвестиционного проекта найти его NPV и IRR.

Замечание. Суммы указаны в млн. рублей. Временное расстояние между соседними поступлениями - один квартал (0.25 года). Банковская ставка для всех вариантов равна 20% годовых.

№ вар.	1-й год					2-й год				3-й год			
	Нач. Дата	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
1	-1.3	-0.5	-0.7	-0.5	-0.5	-2.4	2	2.5	2.5	3	3	3	3
2	-2.2	-1	-0.9	-0.7	-2.5	0	0	1.4	2	2.5	3	3.5	4
3	-3	-2.1	-1.7	-2.3	-1.1	-0.5	-0.4	0	6	5	4	3	3
4	-5.1	-2.3	-2.3	0	1.5	2	2	2	2	2	2	2	2
5	-4.3	-3.6	-3.6	-2.1	-0.1	0	5	5	5	3	3	3	3
6	-2.8	-4.1	-1.3	-0.8	-0.6	0	3	5	6	4	4	4	4
7	-5.2	-3.8	-2.5	-0.9	-0.1	1.5	5.5	7	3	3	3	3	3
8	-1.8	-0.9	-0.8	-1.5	-0.2	-0.1	0	2	3	4	4	4	4
9	-4.3	-5.1	-3.7	-2.4	-1.1	-0.9	-0.1	0	8	9	2	2	2
10	-2.4	-2.8	-1.8	-1.3	-1	-0.7	-0.2	10	2	7	1.5	1.5	1.5
11	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-2	0	1	4	1	1	1	1	1
12	-0.5	-0.6	-0.7	-0.6	-0.5	-0.1	0	3	2	2	1	1	1
13	-1.4	-1.4	-1.8	-0.8	-0.8	-2	2	2	2	2	2	2	2
14	-3.3	-3.4	-3.5	-5.1	0	4	8	3	3	3	3	3	3
15	-10.8	-10.8	0.2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
16	-7.4	-6.3	-6.3	-1.6	-0.7	1.3	10	10	4	4	4	4	3
17	-1.9	-2.1	-3.3	-0.8	-2.5	1.5	8	3	3	3	3	2	2
18	-2.3	-2.3	-3.5	-4.1	-2.1	-0.2	2.4	5	9	4	3	2	2
19	-2.1	-1.3	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	2.5	3	3	3	3	3	3
20	-6.6	-5.1	-4	-3.2	-3.2	-5	6	8	5	5	5	5	5
21	-7.2	-5.2	-5.2	-5.2	-0.3	0.1	7	7	6	6	5	5	5
22	-3.5	-3.5	-3.5	-4	-4	-4	6	6	4	4	4	4	4
23	-4.1	-3.4	-3.4	-3.4	-2	-2	4	4	5	5	5	5	5
24	-3.4	-2.5	-2.5	-2	-0.4	0.1	3	4	4	4	4	4	4
25	-2.8	-1.5	-1.5	-1.5	-0.8	2	2	2	2	2	2	2	2
26	-2.3	-2.3	-1.4	-1.7	-0.6	-0.1	0.8	0.9	1.4	2.4	2.4	2.4	2.4
27	-5.3	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	0.4	0.6	0.8	1	2	2	2	1.5
28	-3.8	-1.4	-0.6	-0.3	0	0.1	0.7	0.9	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
29	-7.5	-3	-1	-1	-0.5	1.7	2.4	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
30	-4.5	-2	-2	-2	-1	-1	-0.5	1.6	2.5	3	3	3	3

Задание №3. Оптимизация портфеля инвестиций.

Обозначим: $\vec{x} = (x_1,...,x_n)^T$, x_i - доля капитала, помещенного в i -й объект инвестирования; $\vec{m} = (m_1,...,m_n)^T$, m_i -ожидаемое среднее значение коэффициента наращения капитала, помещенного в i -й объект инвестирования; σ_i -волатильность коэффициента наращения капитала для i -го объекта инвестирования (риск Марковица).

Предположим, что случайные величины коэффициентов наращения капитала для различных объектов инвестирования не коррелируют друг с другом. Тогда портфель $\vec{x}$ с минимальным значением риска σ_p дается равенствами $x_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2} \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_k^2}$, $i = 1,..,n$, причем $\sigma_p^2 = 1 \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_k^2}$, а среднее ожидаемое значение роста стоимости портфеля $m_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{\sigma_i^2} \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_k^2}$.

Для заданной в варианте совокупности объектов инвестирования найти состав портфеля с минимальным риском, а также его характеристики - риск σ_p и среднее ожидаемое значение роста стоимости портфеля m_p.

Замечание. Предполагается, что предварительно проведена фильтрация объектов инвестирования, исключающая те из них, для которых найдутся объекты с большим m_i и меньшим риском σ_i.

№ варианта	№ объекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	m_i	1.8	1.9	2.1	2.2	2.25	2.3	2.7	2.8	2.85	2.9
	σ_i	0.1	0.15	0.1	0.15	0.2	0.3	0.7	0.75	0.8	0.9
2	m_i	1.1	1.15	1.2	1.27	1.3	1.7	1.8	1.95	2.1	2.15
	σ_i	0.1	0.11	0.2	0.25	0.23	0.27	0.3	0.45	0.5	0.6
3	m_i	1.21	1.25	1.32	1.38	1.41	1.47	1.52	1.58	1.7	1.76
	σ_i	0.12	0.13	0.15	0.19	0.17	0.21	0.3	0.35	0.41	0.47
4	m_i	1.32	1.37	1.41	1.42	1.43	1.49	1.52	1.54	1.65	1.8
	σ_i	0.17	0.18	0.19	0.21	0.22	0.21	0.24	0.3	0.31	0.41
5	m_i	1.27	1.28	1.35	1.36	1.42	1.44	1.52	1.59	1.6	1.62
	σ_i	0.16	0.17	0.19	0.22	0.24	0.23	0.27	0.3	0.34	0.37
6	m_i	1.18	1.23	1.27	1.33	1.36	1.39	1.42	1.44	1.49	1.51
	σ_i	0.14	0.15	0.17	0.19	0.2	0.21	0.2	0.24	0.29	0.31
7	m_i	1.09	1.11	1.17	1.21	1.23	1.27	1.29	1.31	1.35	1.39
	σ_i	0.09	0.11	0.12	0.13	0.15	0.14	0.19	0.21	0.24	0.29
8	m_i	1.19	1.22	1.23	1.25	1.27	1.31	1.32	1.37	1.39	1.41
	σ_i	0.12	0.13	0.15	0.17	0.19	0.18	0.21	0.23	0.24	0.29
9	m_i	1.17	1.19	1.24	1.28	1.31	1.32	1.36	1.39	1.42	1.45
	σ_i	0.14	0.15	0.16	0.18	0.21	0.19	0.24	0.27	0.29	0.31
10	m_i	1.41	1.43	1.52	1.59	1.61	1.65	1.68	1.72	1.74	1.8
	σ_i	0.21	0.24	0.27	0.31	0.29	0.32	0.41	0.43	0.45	0.49
11	m_i	1.52	1.59	1.61	1.64	1.67	1.72	1.78	1.81	1.83	1.86
	σ_i	0.28	0.29	0.31	0.32	0.36	0.38	0.37	0.39	0.42	0.47
12	m_i	1.32	1.34	1.42	1.46	1.49	1.52	1.57	1.63	1.68	1.74
	σ_i	0.19	0.21	0.23	0.25	0.29	0.27	0.31	0.33	0.35	0.37
13	m_i	1.7	1.75	1.8	1.92	1.95	2.3	2.4	2.52	2.7	2.9
	σ_i	0.25	0.31	0.39	0.44	0.49	0.51	0.5	0.55	0.6	0.62
14	m_i	1.5	1.55	1.6	1.63	1.68	1.72	1.75	1.86	1.89	1.93
	σ_i	0.23	0.25	0.29	0.32	0.34	0.37	0.35	0.41	0.48	0.51
15	m_i	1.45	1.48	1.52	1.56	1.59	1.62	1.64	1.7	1.77	1.81
	σ_i	0.19	0.22	0.24	0.28	0.31	0.29	0.34	0.36	0.41	0.44
16	m_i	1.1	1.15	1.2	1.3	1.35	1.41	1.47	1.52	1.58	1.63
	σ_i	0.1	0.16	0.1	0.18	0.2	0.23	0.24	0.25	0.27	0.28

№ варианта	№ объекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	m_i	1.3	1.37	1.41	1.43	1.47	1.49	1.56	1.61	1.69	1.72
	σ_i	0.15	0.17	0.16	0.19	0.2	0.21	0.22	0.24	0.26	0.28
18	m_i	1.7	1.72	1.86	1.91	1.96	1.98	2.01	2.12	2.14	2.23
	σ_i	0.21	0.23	0.22	0.24	0.27	0.29	0.31	0.37	0.41	0.44
19	m_i	1.61	1.66	1.73	1.79	1.83	1.91	1.92	1.97	2.03	2.15
	σ_i	0.19	0.17	0.2	0.23	0.31	0.33	0.37	0.41	0.44	0.49
20	m_i	1.81	1.88	1.89	1.93	2.03	2.04	2.17	2.2	2.24	2.31
	σ_i	0.25	0.23	0.27	0.31	0.51	0.55	0.57	0.6	0.63	0.65
21	m_i	1.22	1.24	1.27	1.31	1.33	1.36	1.39	1.41	1.52	1.63
	σ_i	0.31	0.24	0.25	0.2	0.27	0.31	0.38	0.42	0.49	0.53
22	m_i	1.53	1.57	1.63	1.72	1.76	1.79	1.83	1.86	1.91	1.99
	σ_i	0.27	0.28	0.23	0.29	0.36	0.39	0.43	0.44	0.51	0.59
23	m_i	1.83	1.93	1.97	2.03	2.07	2.09	2.14	2.2	2.23	2.5
	σ_i	0.3	0.31	0.27	0.3	0.31	0.34	0.37	0.39	0.41	0.43
24	m_i	1.61	1.63	1.67	1.69	1.73	1.77	1.79	1.81	1.88	1.9
	σ_i	0.22	0.24	0.23	0.3	0.33	0.37	0.39	0.41	0.44	0.47
25	m_i	1.31	1.33	1.39	1.41	1.52	1.54	1.57	1.55	1.61	1.69
	σ_i	0.17	0.19	0.18	0.21	0.24	0.27	0.31	0.34	0.41	0.45
26	m_i	1.2	1.3	1.4	1.5	1.7	1.8	1.9	1.92	1.98	2.21
	σ_i	.40	.42	.40	.43	.52	.53	.6	.71	.82	.91
27	m_i	1.3	1.4	1.6	1.7	1.8	2.1	2.3	2.57	2.60	2.84
	σ_i	0.7	0.3	0.8	0.7	0.9	.91	.98	.99	1.01	1.04
28	m_i	1.6	1.7	1.9	2.0	2.1	2.2	2.4	2.55	2.63	2.78
	σ_i	.31	.38	.39	.50	.41	.49	.54	.62	.73	.81
29	m_i	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.41	2.53	2.64
	σ_i	.52	.61	.66	.58	.63	.68	.73	.85	.91	.97
30	m_i	1.9	2.1	2.2	2.3	2.5	2.7	2.8	2.93	2.99	3.05
	σ_i	.61	.68	.71	.67	.79	.82	.89	.93	.98	1.03

Александр Витальевич Крянев

Основы финансового анализа и портфельного инвестирования в рыночной экономике

Учебное пособие издается в авторской редакции

ЛР № 020676 от 09.12.1997г.

Подписано в печать 01.12.2000. Формат 60 x 84 1/16
Печ. л. 3,5 Уч.-изд.л. 3,5 Изд № 003-1
Тираж 150 экз. Заказ

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет)

Типография МИФИ,
115409, Москва, Каширское шоссе,31.